



UM EXPERIMENTO DIDÁTICO DA MODELAGEM MATEMÁTICA DA PLUVIOMETRIA NA REGIÃO NORTE

AN DIDACTIC EXPERIMENT OF MATHEMATICAL MODELING OF THE RAINFALL IN NORTH REGION

Fábio José da Costa Alves
Alberto Carlos de Melo Lima
Universidade do Estado do Pará - UEPA

Resumo

A presente pesquisa teve como objetivo verificar se os professores de Matemática, em formação, ao participarem de um experimento de modelagem matemática, envolvendo dados de GPS, apresentam motivação em usar tal experimento como instrumento didático. Para respondermos esta questão de pesquisa, fizemos um experimento de modelagem matemática envolvendo a pluviometria na região Norte, em duas turmas da disciplina Cálculo Numérico, do Curso de Matemática, de uma Universidade Pública. Os dados utilizados continham uma série histórica das principais cidades do estado. No experimento, observamos mudanças nas atitudes dos alunos relacionadas à segurança no conteúdo, ao enfrentamento de problemas e novas expectativas no uso de seu conhecimento.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Pluviometria na Região Norte; Formação de professores; Interdisciplinaridade.

Abstract

The present research aimed to verify whether teachers of Mathematics, in training, taking part in an experiment of mathematical modeling, which involves GPS data, show motivation in using this experiment as a teaching tool. To answer this research question, we made an experiment of mathematical modeling involving the rainfall in Brazilian northern region, in two classes of Numeric Calculus, of Mathematics undergraduate course, in a public university. The data used contained a historical series of the principal cities of the state. In the experiment, we observed changes in the attitudes of the students related to their confidence in the content, to the way they face problems and new expectations in the use of their knowledge.

Keywords: Mathematical Modeling; Rainfall in Brazilian northern region; Teacher in training; Interdisciplinarity.



Introdução

A necessidade de o homem se posicionar geograficamente é muito antiga, fortemente sentida pelos navegadores do século XVI, época em que o céu era a única referência para localizações. Com o passar dos anos, vários instrumentos foram criados para ajudar na navegação, produzindo melhores resultados do posicionamento e com mais precisão. Atualmente, os receptores GPS se comunicam com satélite para fornecerem informações de localização, possibilitando ao usuário se localizar em um mapa de um determinado local usando coordenadas de latitude e longitude. O receptor GPS traça o caminho a partir de um local para outro, e com estas informações e do seu relógio embutido, o receptor GPS pode dar aos usuários as seguintes informações (Christie, 2007):

- a distância percorrida (odômetro);
- o tempo decorrido na viagem;
- a sua velocidade atual (velocímetro);
- a sua velocidade média;
- a localização dos viajantes no mapa durante o percurso;
- a estimativa do tempo de chegada em um determinado destino.

A matemática envolvida na geolocalização permite ao professor de Matemática explorar os conteúdos dos diferentes sistemas de coordenadas, a transformação entre eles, o que mobiliza o conhecimento de sistema matricial entre outros conteúdos. Segundo Simmons(1988), existem vários sistemas de coordenadas, com uso mais ou menos frequentes em aplicações científicas, destacando-se as coordenadas cartesianas, as polares, as cilíndricas e as esféricas, e todos podem ser entendidos como um conjunto de

Revista Cocar

Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará



regras que atribuem números à posição de pontos no espaço, sendo necessária a definição de uma origem e uma orientação para que interpretações ambíguas sejam evitadas.

No sistema de coordenadas, podemos relacionar a Álgebra com a Geometria, fusão que nos permite trabalhar a Geometria Analítica, o raciocínio dedutivo a partir de axiomas e teoremas para obtermos proposições verdadeiras, sendo utilizados métodos e símbolos algébricos para representarem e resolverem problemas geométricos.

A interface da Matemática com a Geografia fomenta experimentos dentro da multidisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade. Segundo D'Ambrósio (1994), a multidisciplinaridade procuraria reunir resultados obtidos mediante o enfoque disciplinar, como se pratica nos programas de um curso escolar. Já a interdisciplinaridade, a qual vem sendo muito praticada no momento atual nas escolas, transferiria métodos de algumas disciplinas para outras, identificando assim novos objetos de estudo. Finalmente, no caso da transdisciplinaridade, teríamos um enfoque ao conhecimento que se apoiaria na recuperação das várias dimensões do ser humano para a compreensão do mundo na sua integridade. Em particular, a interdisciplinaridade oferece uma nova postura diante do conhecimento, e visa garantir a construção de um conhecimento de forma globalizada, rompendo com os limites das disciplinas, contribuindo para a formação integral do aluno.

A Geografia, por si só, se constitui em um saber interdisciplinar elaborado em diferentes épocas e em diferentes contextos (sociais, culturais, ideológicos, políticos, religiosos), e é marcado pelas representações de mundo e ideias predominantes em cada momento, e o processo de ensino e aprendizagem, desta disciplina, devem transcender os limites conceituais e buscar a interatividade com as outras ciências sem perder sua identidade e especificidade.” (Brasil, 2015).

Para Silva e Cameiro (2012, p.340), as geotecnologias podem e devem ser utilizadas, em atividades educativas, como ferramentas didáticas adaptadas pelo professor



de acordo com seus objetivos e seu domínio do conteúdo, podendo tornar as aulas mais atraentes e, ao mesmo tempo, contribuir para formação mais abrangente dos alunos. Além de minimizar a ansiedade de nossos adolescentes e jovens por resultados imediatos, isto é, tudo que se faz ou se pensa deve gerar um resultado prático e imediato (ALMOULOU, SILVA e FUSCO, 2012).

Este fenômeno é facilmente observável em sala de aula, quando o professor de Matemática busca desenvolver os conteúdos, logo se depara, frequentemente, com questões do tipo: para que serve isso? Quando utilizaremos e de que forma? É o aluno sentindo a necessidade de enxergar, quase que instantaneamente, uma aplicação para o que está aprendendo, fomentando, nele, a necessidade de um conhecimento global, em que a aprendizagem contextualizada ganha ênfase, por propiciar uma aprendizagem com mais significado, para os alunos, ao associar os conteúdos ensinados em sala de aula com o contexto que experimentam no dia a dia.

Attard e Northcote (2012) apontam vantagens do uso do GPS nas aulas de Matemática, em que os alunos do ensino fundamental podem usar um dispositivo GPS para conduzir investigações matemáticas que cruzam vários conteúdos dessa disciplina e de outras áreas curriculares, usando de forma autêntica, na escola, a tecnologia de que já dispõem em sua casa. Porém Duarte (2014, p. 20), em sua pesquisa, observou que 92% dos alunos do Ensino Médio, de uma escola pública no estado de Goiás, considera o conteúdo do Sistema de Posicionamento Global - GPS uma ferramenta essencial ou importante, e que 67,3% destes já fez uso do GPS, porém só 55% dos alunos participou de alguma aula relacionada ao tema GPS, sendo o assunto tratado nas aulas de geografia, sem vínculo com conteúdos matemáticos.

Em geral, os projetos pedagógicos dos cursos de Matemática não possuem componentes curriculares voltadas para o uso de GPS nem relacionam a matemática escolar com o uso deste artefato tecnológico. O novo cenário, em que estão imersas as



escolas, impõe a necessidade de mudanças na forma de ensinar dos professores, para que utilizem os recursos disponíveis, que hoje em dia são mais diversos e abundantes, em favor da aprendizagem dos alunos, estabelecendo estreita relação do que é ensinado com o que é vivido pelo aluno no seu dia a dia.

O uso de tecnologia no ensino da Matemática trouxe uma nova perspectiva para o ensino e aprendizagem dessa disciplina, ao possibilitar mudanças no ‘fazer matemático’ do aluno, de forma que ele tem a possibilidade de experimentar, visualizar, induzir em ambiente dinâmico, o que facilita a interpretação, construção de conjecturas, abstração, generalização e enfim a demonstração, de forma que a aquisição do conhecimento matemático ocorre de forma mais consistente. Porém, a inserção de tecnologia deve estar sempre vinculada em uma metodologia, pois, de forma diferente, se torna infrutífera, o que nos remete à necessidade de o professor estar capacitado no uso de novas tecnologias e saber associar essa a estratégias e metodologias de forma a torná-la eficiente no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Segundo Zabel (2014, p. 40), a legislação prevê que os cursos de formação inicial de professores preparem seus licenciandos para utilização das tecnologias na sala de aula, e algumas pesquisas têm se dedicado a estabelecer componentes básicos que possam vir a garantir a formação do professor em relação ao uso das tecnologias. Há três conhecimentos que devem ser promovidos pela graduação, necessários ao professor: conhecimentos técnicos sobre os *softwares*; conhecimentos sobre as possibilidades e diferentes abordagens do uso pedagógico do computador para o ensino e a aprendizagem da Matemática; e conhecimentos de como organizar uma atividade e de como integrá-la ao currículo.

Uma das metodologias da Educação Matemática, mais receptiva ao uso de novas tecnologias é a modelagem matemática, que, segundo Chaves e Espírito Santo (2008), é um gerador de oportunidades no qual os conteúdos matemáticos podem ser vistos

Revista Cocar

Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará



imbricados a outros conteúdos de outras áreas do conhecimento, por exemplo, da Física, Química, Economia etc.

Já para Burak (1992, p.62), a modelagem matemática compreende um conjunto de procedimentos visando construir um modelo para tentar explicar por meio da Matemática os fenômenos do dia a dia do homem, auxiliando-o a fazer previsões e tomar decisões. Já para Bassanezi (2002), a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

Para Chaves e Santo (2006), a modelagem matemática é um processo que traduz uma situação/questão existente na realidade, já transcrita, ou não, na linguagem corrente, em linguagem simbólica da Matemática, fazendo aparecer um modelo matemático que, por ser uma representação significativa do real, se resolvido/analísado e interpretado segundo as teorias matemáticas, devolve informações interessantes para o entendimento da realidade que se está questionando. E para Biembengut e Hein (2000), a modelagem matemática é uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma situação particular, mas que também sirvam, posteriormente, para outras aplicações.

O uso da modelagem na ciência e na educação apresenta etapas semelhantes, porém difere quanto à importância de como construir o modelo e da eficiência deste na representação do fenômeno estudado. Na ciência, a modelagem assume aspecto mais profissional, e busca construir modelos que sejam os mais fidedignos possíveis ao fenômeno estudado, sendo dada pouca relevância à Matemática utilizada na construção desse modelo. Já no ambiente educacional, o importante é a mobilização da Matemática utilizada na construção do modelo, que deve ser associada à Matemática que o professor está desenvolvendo em classe, associando-a à resolução de problemas reais, dando mais



significado, que é desenvolvido em sala de aula, não importando a precisão do modelo construído.

Para Barbosa (2001), a modelagem matemática é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade, em que o sucesso das atividades de modelagem matemática depende, principalmente, do contexto escolar, da experiência do professor e dos interesses dos alunos, e, em muitos casos, constitui ambiente idêntico aos processos interdisciplinar e transdisciplinar. Já para Burak (1992, p.62), a modelagem matemática compreende um conjunto de procedimentos visando construir um modelo para tentar explicar por meio da Matemática os fenômenos do dia a dia do homem, auxiliando-o a fazer previsões e tomar decisões, o que faz com que esta se torne uma excelente metodologia de ensino para viabilizar a aprendizagem de conteúdos escolares por meio de resolução de problemas reais do cotidiano, aproximando o que é ensinado na escola com o que o aluno vive no dia a dia, fomentando sua formação cidadã, a partir de uma aprendizagem mais significativa e vinculada a sua realidade.

Contudo, é importante destacarmos que o sucesso em um experimento de modelagem, principalmente em ambiente escolar, depende do conhecimento e habilidade do professor nesta metodologia, daí a importância da experiência de modelagem em sua formação inicial ou continuada. A postura do professor se modifica em um experimento de modelagem, devendo este assumir um papel de orientador, de promotor de debates, fazendo convergir as discussões dos alunos para os conteúdos abordados em sala de aula. Nestas condições, segundo Barasuol (2006), há um aumento da motivação dos alunos em aprender, dá-se a facilitação da aprendizagem dos conteúdos envolvidos, o desenvolvimento das habilidades gerais de exploração, preparação para utilizar a Matemática em diversas áreas e principalmente a compreensão do papel sociocultural da Matemática.



Nesta construção de nossa questão de pesquisa, consideramos, a partir do exposto, as seguintes premissas:

1ª – O uso do GPS, em sala de aula, permite explorar vários assuntos de Matemática em experimentos investigativos;

2ª – A Geografia constitui um saber interdisciplinar;

3ª – A interdisciplinaridade proporciona ao aluno uma nova postura que contribui para sua formação integral;

4ª – A modelagem matemática é um ambiente de aprendizagem que convida o aluno a aprofundar seus conhecimentos em Matemática a partir de investigações sobre problemas reais;

5ª – Via de regra, os professores de Matemática, durante o período de formação, não recebem capacitação do uso do GPS como ferramenta didática.

A partir dessas premissas, chegamos à seguinte conclusão: Os professores de Matemática em formação, ao participarem de um experimento de modelagem matemática envolvendo dados de GPS, apresentam motivação em usar este como instrumento didático.

Para avaliarmos esta argumentação, fizemos um experimento de modelagem matemática em duas turmas de Cálculo Numérico, do curso de Licenciatura em Matemática, sendo a disciplina ministrada no último ano do curso. Porém, é importante ressaltarmos que há várias maneiras de concebermos e materializarmos a modelagem na sala de aula (Barbosa, 1999, p.5), como através de projetos de curta ou longa duração, de situações que podem requerer uma ou duas aulas ou atividades propostas aos alunos.

De acordo com as possibilidades de sala de aula, Barbosa (2003, p.70) explicita três “casos” para a aplicação da modelagem, que são categorizados conforme as tarefas



que compete ao professor e/ou aos alunos desenvolverem dentro do processo de modelagem, na sala de aula, conforme quadro a seguir:

Quadro – Tarefas do professor e dos alunos nos casos de Modelagem

	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>	<i>Caso 3</i>
<i>Elaboração da situação-problema</i>	professor	professor	professor/aluno
<i>Simplificação</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Dados qualitativos e quantitativos</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Resolução</i>	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

No caso 1, o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos [...], acompanhados pelo professor, [...] a tarefa de resolver o problema. Já no caso 2, os alunos deparam-se apenas com o problema para investigar [...]. Ao professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial. [...] E, por fim, no caso 3, trata-se de projetos desenvolvidos a partir de temas ‘não-matemáticos’, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. (BARBOSA, 2003 p. 69)

A pesquisa foi desenvolvida a partir de preceitos qualitativos, sendo os dados registros de voz feitos durante os encontros em classes, e em conversas com alunos após as aulas, tendo como foco o próprio experimento. A análise desses experimentos foi feita segundo a microgenética, que consiste no acompanhamento minucioso da formação de um processo, detalhando as ações dos sujeitos e as relações interpessoais, dentro de um curto espaço de tempo. Segundo Goés (2000, p.14), é uma espécie de estudo longitudinal de curto prazo e uma forma de identificar transformações das ações dos sujeitos e a passagem do funcionamento intersubjetivo para intrassubjetivo.

Revista Cocar

Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará



Salientamos, porém, que a metodologia é denominada micro não porque se refere à curta duração de tempo, mas sim por ser orientada para minúcias indiciais, daí a necessidade de recortes num tempo que tende a ser restrito. É genética no sentido de ser histórica, por focalizar no momento, durante processos, e relacionar condições passadas e presentes, tentando explorar aquilo que, no presente, está impregnando a projeção futura. É genética, como sociogenética, por buscar relacionar os eventos singulares com outros planos da cultura, das práticas sociais, dos discursos circulantes, das esferas institucionais.

O experimento de modelagem seguiu os moldes do 1º caso Barbosa (2003 p. 69), em que o professor elabora a situação problema, neste caso: ‘As chuvas no Estado do Pará’. Ele também faz a simplificação do problema e fornece os dados para que os alunos busquem a solução. O experimento didático envolveu duas turmas de cálculo numérico, uma matutina e outra vespertina, ambas com 17 alunos cada com duas aulas semanais, da disciplina cálculo numérico do curso de Matemática de uma Universidade Pública, e foi feitas orientações de construir o modelo a partir do conteúdo da disciplina.

A pesquisa foi realizada por Fábio Alves, professor da disciplina, com encontros foram realizados no horário regular das aulas da turma (duas horas de aulas uma vez por semana). O experimento aconteceu entre outubro e novembro de 2014, e a atividade constituiu a quarta avaliação da turma. Foi utilizada a estratégia de trabalhar em grupos para possibilitar a interação diversificada entre os alunos e destes com o professor, que desenvolveu ações no sentido de conduzir a atividade, completando, mediando e discutindo as respostas apresentadas.

No desenvolvimento do experimento de modelagem, as turmas foram divididas em grupos de 5 e 6 alunos, e apesar de serem de turnos diferente, os alunos mantinham interação constante, com reuniões periódicas para tratarem sobre a formatura, e motivados pelo experimento didático aproveitavam estes momentos para discutir e trocar



ideias sobre a solução do problema proposto. Não temos registro destes momentos, só relatos, dos próprios alunos, de que eram momentos de intensas discussões e trocas de ideias, que influenciavam os encontros em sala de aula.

Este fato se explica, se considerarmos que o aluno, frente ao desafio posto, inicia a busca por solução, o que fomenta a necessidade de domínio de novos conhecimentos em um processo de pesquisa, que expande o processo de aprendizagem além dos limites físicos e temporais da sala de aula, imputando à modelagem matemática um ambiente de formação amplo, em que o aluno passa a ser mais responsável pela aquisição do seu conhecimento.

Para apresentarmos o tema, distribuimos um texto que tratava das chuvas intensas nos municípios do estado do Pará, sensibilizando os alunos para a questão pluviométrica e a carência de dados e a importância desses dados para o planejamento econômico. Os dados do texto são uma série histórica, construída ao longo dos últimos 33 anos, de dados pluviométricos para as principais cidades do estado do Pará, obtidos do Sistema de Informação Hidrológicas da Agência Nacional de Águas (ANA, 2007), perfazendo 11 estações pluviométricas selecionadas nos municípios de Altamira, Belém, Breves, Castanhal, Igarapé-Açu, Itaituba, Marabá, Paragominas, Redenção, Santarém e São Félix do Xingu.

CHUVAS INTENSAS NAS LOCALIDADES DO ESTADO DO PARÁ

A relação Intensidade–Duração–Frequência (IDF) da precipitação pluvial tem sido usada como ferramenta importante para projetos de obras hidráulicas. Para a obtenção destas equações são necessários dados pluviográficos.

O Estado do Pará possui uma carência de dados pluviográficos, o que justifica a falta de dados bibliográficos sobre equações de chuvas intensas no Estado. Segundo Santos et al. (2009) as equações IDF, também chamadas de equações de chuvas intensas, tornam-se mais eficientes quando além de utilizarem dados locais, apresentam séries mais longas de dados observados. As grandes dificuldades estão na escassez de informações, da baixa densidade de redes pluviográficas e do pequeno período de observações disponíveis. Por essa ocasião, hoje em dia poucos trabalhos têm sido realizados com tal finalidade, ocasionando um grande entrave na realização de projetos de obras hidráulicas mais confiantes e econômicos (PRUSKI et al., 2002).

Os métodos que se baseiam nas relações entre chuvas intensas de diferentes durações têm validade regional, embora os valores médios destas relações sejam muitos próximos para várias

Revista Cocar

Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará



partes do mundo. Para estimativas locais são convenientes que sejam estabelecidos novos coeficientes, relacionados às características locais dos microclimas (GENOVEZ; ZUFFO, 2000).

Algumas metodologias foram desenvolvidas no Brasil para a obtenção de chuvas de menor duração a partir de registros pluviométricos diários, devido à existência no território nacional de vasta rede pluviométrica.

Neste trabalho foram utilizados séries históricas de dados pluviométricos para as principais cidades do Estado do Pará, obtidos do Sistema de Informação Hidrológicas da Agência Nacional de Águas (ANA, 2007), perfazendo 11 estações pluviométricas selecionadas nos municípios: Altamira, Belém, Breves, Castanhal, Igarapé-Açu, Itaituba, Marabá, Paragominas, Redenção, Santarém e São Félix do Xingu. Para cada estação foram montadas as séries históricas dos valores máximos anuais com séries de 33 anos em média.

Foram obtidos chuvas com durações de cinco, dez, quinze, vinte, vinte e cinco, e trinta minutos, e de uma, seis, oito, dez, doze e vinte e quatro horas, pelo emprego dos coeficientes multiplicativos, apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 – Dados da intensidade máxima média de chuvas em mm, em município do norte do País.

Localidades	Latitude	Longitude	Intensidade Máxima média de chuva em mm h-1			
			0min	360min	20min	1440min
Altamira	3°11'54''S	52°12'37''W	64,17	28,83	7,09	10,09
Belém	°27'26''S	48°29'41''W	9,41	17,47	0,35	6,11
Breves	°41'29''S	50°28'59''W	1,86	16,13	,56	5,64
Castanhal	°17'47''S	47°55'27''W	91,27	33,60	9,91	11,75
Igarapé-Açu	°07'58''S	47°37'13''W	16,60	38,04	2,54	13,30
Itaituba	°16'02''S	55°59'25''W	57,93	27,74	6,44	9,70
Marabá	°22'57''S	49°08'05''W	16,62	20,48	2,14	7,16
Paragominas	°00'09''S	47°21'14''W	39,88	24,57	4,56	8,59
Redenção	°01'46''S	50°01'55''W	22,12	21,45	2,71	7,50
Santarém	°25'37''S	54°41'44''W	27,70	22,43	3,29	7,84
São Félix do Xingu	°38'25''S	51°57'57''W	09,15	19,17	1,36	6,70

A partir das informações da tabela determine as Intensidade Máxima média de chuva em mm h-1, do município de Moju que tem as seguintes coordenadas: 1°53'04.1"S 48°45'56.0"W e determine o volume de chuvas na região, considerando a intensidade máxima média de chuva em mm.



Após a leitura e discussão sobre o texto, surgiram as primeiras conjecturas sobre a resolução do problema, havendo várias falas destacando o desafio desde a questão da interdisciplinaridade à necessidade de tempo para pesquisa.

No segundo momento de socialização, alguns alunos fizeram a questão de dizer que “[...] assunto não estava fácil de encontra na *internet* [...]” e que “[...] as soluções encontradas eram diferentes aos assuntos dados na sala de aula [...]”. Houve consenso de que uma boa solução para o assunto consistia em converter os dados apresentados em coordenadas geográficas em coordenadas cartesianas, e a partir daí utilizar o ajuste superficial para calcular as informações solicitadas para o município de Moju.

A partir das discussões em sala de aula, as equipes analisaram a demonstração da obtenção do sistema para o ajuste linear, e, em seguida, utilizaram este princípio para obter um sistema de ajuste de superfície, que representaria o modelo da distribuição da região. A equação da superfície adotada no ajuste foi:

$$z = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

cujos coeficientes, a , b , c , d , e e f , foram obtidos a partir dos mínimos quadrados, minimizando o quadrado do erro entre os dados observados e a superfície de ajuste:

$$S(a, b, c, d, e, f) = \sum_{i=1}^n (a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 - z)^2$$

gerando sistema linear do tipo:



$$\begin{bmatrix}
 n & \sum_{i=1}^n x & \sum_{i=1}^n y & \sum_{i=1}^n x^2 & \sum_{i=1}^n xy & \sum_{i=1}^n y^2 \\
 \sum_{i=1}^n x & \sum_{i=1}^n x^2 & \sum_{i=1}^n xy & \sum_{i=1}^n x^3 & \sum_{i=1}^n x^2y & \sum_{i=1}^n xy^2 \\
 \sum_{i=1}^n y & \sum_{i=1}^n xy & \sum_{i=1}^n y^2 & \sum_{i=1}^n x^2y & \sum_{i=1}^n xy^2 & \sum_{i=1}^n y^3 \\
 \sum_{i=1}^n x^2 & \sum_{i=1}^n x^3 & \sum_{i=1}^n x^2y & \sum_{i=1}^n x^4 & \sum_{i=1}^n x^3y & \sum_{i=1}^n x^2y^2 \\
 \sum_{i=1}^n xy & \sum_{i=1}^n x^2y & \sum_{i=1}^n xy^2 & \sum_{i=1}^n x^3y & \sum_{i=1}^n x^2y^2 & \sum_{i=1}^n xy^3 \\
 \sum_{i=1}^n y^2 & \sum_{i=1}^n xy^2 & \sum_{i=1}^n y^3 & \sum_{i=1}^n x^2y^2 & \sum_{i=1}^n xy^3 & \sum_{i=1}^n y^4
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n z \\ \sum_{i=1}^n zx \\ \sum_{i=1}^n zy \\ \sum_{i=1}^n zx^2 \\ \sum_{i=1}^n zxy \\ \sum_{i=1}^n zy^2 \end{bmatrix}$$

Este sistema foi comparado com os encontrados na *internet*, onde foram observadas diferenças que colocavam em dúvida qual modelo estaria certo. Para sanar as suspeitas, surgiu a necessidade de validar o modelo encontrado em um experimento controlado, isto é, seria feita a inversão nos dados gerados por uma equação de superfície conhecida. Neste momento, as equipes fizeram separadamente a avaliação de seus modelos, e confrontaram seus resultados em um momento de socialização para determinar qual o melhor modelo a ser usado. Os resultados apontaram que o sistema que fez a melhor aproximação da superfície foi obtido pelos alunos partir de seu desenvolvimento matemático. No momento da socialização, um ‘Aluno A’ do ‘Grupo 1’ afirmou “[...] por isto que é bom analisarmos o modelo antes de utilizarmos [...]”, e que em seguida o um ‘Aluno C’ do ‘Grupo 3’ complemento dizendo “é muito importante conhecermos como é construído o modelo e não apenas sair usando o que é encontrado na *internet*.”.



Esta fase pode ser bem representada pelo esquema, mostrado na figura 1, que Bassanezi (1994) utilizou para representar o processo dinâmico da modelagem matemática, usado para a compreensão de situações advindas do mundo real e que pressupõe um ciclo de atuações, que partem de uma realidade, criam um modelo (representação) que procura explicar e entender aquela realidade e, com os resultados obtidos, volta-se a ela para validar/reformular o modelo criado.

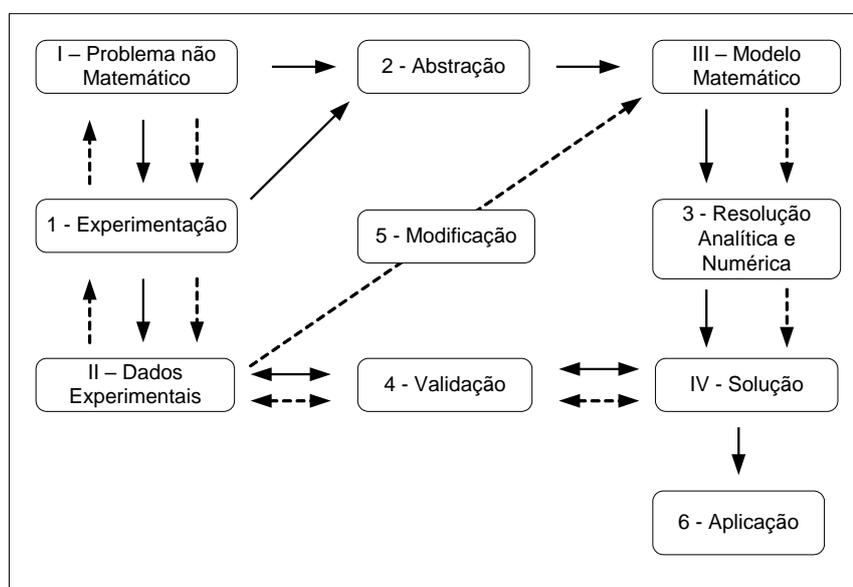


Figura 1. Esquema representativo da modelagem. Bassanezi (1994).

Neste esquema, na *Experimentação*, é feita a busca de dados experimentais que serão investigados. Na *Abstração*, é feita a formulação do modelo matemático, referente à problematização da situação estudada, havendo a devida simplificação da situação estudada para a montagem do modelo. Na *Resolução*, são mobilizados saberes e a aprendizagem de novos conhecimentos no processo de sistematização dos conceitos matemáticos.

Revista Cocar

Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará



A busca da solução do Modelo Matemático, ganha importância no processo, pois novos conhecimentos podem aparecer, o que torna o ensino-aprendizagem da Matemática mais atraente e significativo ao educando. Este é o momento em que se dá a sistematização dos conceitos matemáticos ou de outras áreas na busca da solução para o modelo. Porém é na *Validação* que é feita a aceitação ou não do modelo matemático encontrado, a partir de uma análise do grau de aproximação entre os resultados obtidos pelo modelo e os dados coletados. Após esta fase, se necessário, se faz a *Modificação*, corrigindo erros cometidos ou informações inexatas, aperfeiçoando o modelo de forma a torná-lo o mais fidedigno à realidade estudada. Após esta fase, o modelo está pronto para as *Aplicações*, nas quais se procura confirmar a exatidão ou não do modelo encontrado.

É importante destacarmos que o modelo encontrado tem como entrada dados cartesianos, e para sua utilização neste contexto é necessária a conversão dos dados que estão em coordenadas geográficas em cartesianas. No momento de socialização, os grupos apresentaram duas propostas para esta conversão. A primeira foi a partir das equações das coordenadas esféricas, em que se considera uma aproximação esférica da terra; já a segunda forma implica considerar que o problema se restringe a um microclima, com região menor que 800 minutos, em latitude e longitude, podendo ser considerada como um plano, sem perdas na generalização, estabelecendo um sistema de coordenada local para os dados.

Em momento de socialização, as equipes resolveram que, na conversão dos dados, algumas equipes iriam adotar a estratégia das coordenadas geográficas e as outras, a restrição a um plano específico referente à microrregião, para poderem comparar os resultados. Uma das equipes que adotou como estratégia a conversão dos dados das coordenadas geográficas para um plano obteve a seguinte matriz ampliada, oriunda de um sistema matricial:


$$\begin{bmatrix} 29 & 143,00 & 26,53 & 859,00 & 132,72 & 32,44 & 15,12 \\ 143,00 & 859,00 & 132,72 & 5777,00 & 761,02 & 163,36 & 73,21 \\ 26,53 & 132,72 & 32,44 & 761,02 & 163,36 & 46,12 & 13,34 \\ 859,00 & 5777,00 & 761,02 & 41695,00 & 4783,74 & 911,87 & 413,77 \\ 132,72 & 761,02 & 163,36 & 4783,74 & 911,87 & 232,05 & 66,33 \\ 32,44 & 163,36 & 46,12 & 911,87 & 232,05 & 71,33 & 15,21 \end{bmatrix}$$

A solução, por meio do algoritmo de Gaus-Jordan, gera a seguinte equação:

$$z = -0,103 + 0,365x + 0,192y - 0,038x^2 + 0,015xy - 0,263y^2$$

cuja representação gráfica está ilustrada na Figura 1, onde estão destacados os pontos amostrados, oriundos da Tabela 1 e a superfície de ajuste obtida pelos mínimos quadrados, gerando os seguintes resultados $\bar{P}_{30} = 114.788$, $\bar{P}_{360} = 19.862$, $\bar{P}_{720} = 11.950$, $\bar{P}_{1440} = 7.052$ como a intensidade máxima média de chuva, em mm, dentro da região estudada.

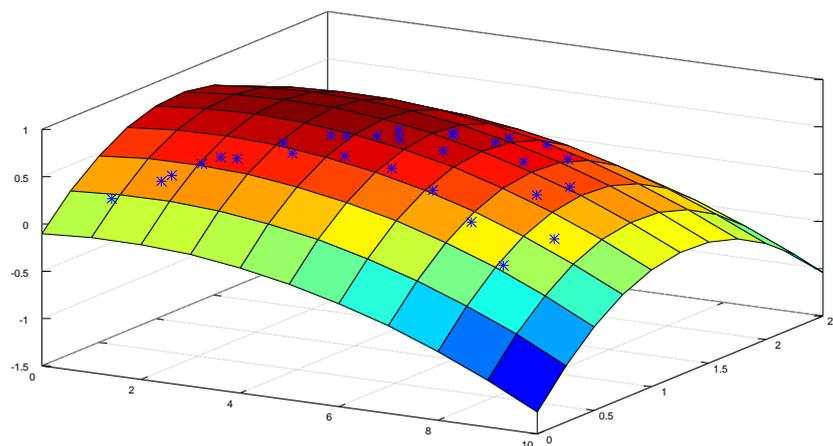


Figura 1 – Representação dos pontos da tabela 1 e a superfície de ajuste mínimos quadrados.

Na socialização final, os alunos tiveram a oportunidade de verificar que os resultados obtidos pelas equipes ficaram muito próximos ao valor esperado, em todos os



valores de Intensidade Máxima média de chuva em mm, na região de Moju, nas coordenadas $1^{\circ}53'04.1''S$ e $48^{\circ}45'56.0''W$.

No momento da comparação, ficou evidente que o princípio adotado na conversão dos dados implicou diferentes equações da superfície para representar a pluviometria na região, porém os resultados finais da pluviometria ficaram muito próximos entre si e do valor esperado para a região. Uma conclusão tirada no final deste experimento de modelagem, dita por um dos alunos, foi que “[...] as hipóteses adotadas no processo estava correta, e que o modelo correspondeu bem as expectativas e atendia seus propósitos [...]”.

Considerações Finais

A Matemática tem um papel importante na construção da cidadania, isto porque é, através desta ciência, que muitas situações cotidianas são entendidas e resolvidas de forma crítica, portanto, a Matemática escolar não pode se limitar ao ensinamento dos conceitos e propriedades que estão no conteúdo programático da disciplina, mas deve possibilitar o desenvolvimento do pensamento crítico, que advém do exercício da abstração, da habilidade demonstrativa e do raciocínio, baseados em hipóteses e da capacidade de elaborar e resolver problemas.

Nesta perspectiva, a resolução de problemas, nas aulas de Matemática, ganha papel de destaque, contribuindo para uma formação de um aluno autônomo, crítico e comprometido com a sociedade em que vive, e quando este envolve elementos do cotidiano, a aprendizagem torna-se mais significativa, por possibilitar ao aluno entender e utilizar as ferramentas a seu alcance na sua realidade sociocultural.

No experimento, foi possível observar que o uso de GPS torna-se uma fonte de motivação para a aprendizagem na Matemática, por aproximar a Matemática desenvolvida em sala de aula com as envolvidas nos recursos tecnológicos a que os alunos têm acesso no seu dia a dia, e neste contexto, a Geografia se mostra uma excelente fonte

Revista Cocar

Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará



de temas interdisciplinares, em que podemos utilizar muitos dos recursos tecnológicos que permeiam o dia a dia dos alunos, dando aplicabilidade ao que é ensinado nas aulas.

Em particular, no experimento didático desta pesquisa, foi possível desenvolver vários conhecimentos matemáticos a partir dos dados do GPS, tais como os vários sistemas de coordenadas, suas concepções e transformações de uma para outra, resolução de sistemas lineares e ajuste polinomial, assuntos desenvolvidos ao longo da graduação. Outro assunto alcançado pelo experimento foi o ajuste superficial, com georeferenciamento, que não figura como assunto da graduação, nem por isto se tornou um obstáculo ao sucesso do experimento, pelo contrário, tornou-se um desafio aos alunos, que, após o experimento, demonstraram a satisfação de ter conseguido, além de expressarem confiança e interesse de prosseguir seus estudos nesta área de aplicação da Matemática e seu uso da educação.

Analisando o experimento, a partir do efeito na formação de professores, observamos que o uso de questões interdisciplinares sensibiliza os alunos da necessidade do uso da Matemática em problemas que envolvam o cotidiano do aluno, para dar mais significado ao que ensinamos e relacionar este as situações do dia a dia e à tecnologia a seu alcance.

Observamos também mudanças nas atitudes dos alunos, relacionadas à segurança no conteúdo, aos enfrentamentos de problemas e novas expectativas no uso de seu conhecimento, que podem gerar mudanças de atitude neles como futuros professores de Matemática, como afirma Fazenda (2003, p. 14). Visto que a aquisição do conhecimento, por experiência interdisciplinar, evidencia-se não apenas na forma como ela é adquirida, mas também na intensidade das buscas que foi empreendida enquanto pesquisamos, nas dúvidas adquiridas e na contribuição delas para nossa formação.

Como a solução encontrada pelas equipes teve como ponto de partida os conhecimentos prévios dos alunos, assuntos desenvolvidos na própria disciplina Cálculo

Revista Cocar

Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará



Numérico, a aprendizagem tornou-se mais significativa e a disciplina passou a ter uma conotação mais prática na visão dos alunos, mudando suas expectativas quanto a futuros investimentos na carreira acadêmica.

Considerando os resultados obtidos, podemos responder positivamente a nossa questão de pesquisa e afirmar que: os professores, de Matemática, em formação, ao participarem de um experimento de modelagem matemática, envolvendo dados de GPS, apresentam motivação em usar este experimento como instrumento didático. De forma que destacamos a necessidade de mais experimentos desta natureza em nossas salas de aulas.

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag, SILVA, M. José Ferreira da e FUSCO, Cristiana Abud da Silva. **Provar e demonstrar: Um espinho nos processos de ensino e aprendizagem da matemática.** Revista Paranaense de Educação Matemática – RPEM, V.1 , n. 1, Campo Mourão, Pr, 2012.

ANA-Agência Nacional das Águas. Hidroweb: Sistemas de informações hidrológicas. <http://hidroweb.ana.gov.br>. 17 Mar. 2007.

ATTARD, Catherine e NORTHCOTE, Maria. Mathematics on the move: Using mobile Technologies to support student learning (Part 2). Teachingwith Technology. APMC 17 (1) 2012.

BARASUOL, Fabiana F. **Modelagem matemática: uma metodologia alternativa para o ensino da matemática.** UNirevista - Vol. 1, n° 2, 2006.

BARBOSA, Jonêi Cerqueira. **O que pensam os professores sobre a modelagem matemática?** Zetetiké, Campinas, v.7, n.11, 1999. Disponível em: <<http://www.inf.unioeste.br/~rogerio/Professores-sobre-Mod-Mat.pdf>>. Acesso em: 20/07/2015.

BARBOSA, Jonêi Cerqueira **Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

Revista Cocar

Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará



BARBOSA, Jonêi Cerqueira. **Uma perspectiva de modelagem matemática.** In: Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática, 3.,2003, Piracicaba. Anais Piracicaba: UNIMEP, 2003. 1.Disponível em: <<http://www.uefs.br/nupemm/cnmem2003.pdf>>. Acesso em: 02/08/2015.

BASSANEZI, R. **Modeling as a teaching-learning strategy.** For the learning of mathematics, Vancouver, v. 14, n. 2, p. 31-35, 1994.

BASSANEZZI, R. C. **Ensino – aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. e HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino.** São Paulo: Contexto, 2000.

BRASIL (2005). Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio. Parte IV - Ciências Humanas e suas Tecnologias. MEC. URL: <http://www.mec.gov.br/seb/pdf/cienciah.pdf>

BURAK, D. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.** Tese de Doutorado em Educação-UNICAMP, São Paulo, 1992.

CHAVES, M. I. A.; ESPIRITO SANTO, A. O. **Modelagem matemática: uma concepção e várias possibilidades.** Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, n. 30, Fev 2008.

CHAVES, M. I. A.; SANTO, A. O. E. **Modelagem Matemática:** uma definição e várias perspectivas. Belém: UFPA, 2006.

CHRISTIE, Alice, **Using GPS and Geocaching Engages, Empowers & Enlightens Middle School Teachers and Students.** Meridian: A Middle School Computer Technologies Journal a service of NC State University, Raleigh, NC Volume 10, Issue 1, 2007.

D'AMBRÓSIO, U. (2004). Um Enfoque Transdisciplinar à Educação Matemática e à História da Matemática. Capítulo do livro "Educação Matemática: Pesquisa em Movimento", organizado por Bicudo, M. A. V. & DUARTE, Pedro Soares. A importância do ensino de Sistema de Posicionamento Global (GPS) para estudantes da Educação Básica do Colégio Estadual Hugo Lôbo em Formosa Goiás. Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Geografia, Universidade de Brasília (UnB), Posse, 2014.

Revista Cocar

Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará



GENOVEZ, A. M.; ZUFFO, A. C. Chuvas intensas no Estado de São Paulo: Estudos existentes e análise comparativa. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, v.5, n.3, p45-58, 2000.

GÓES, M. C. R.A **abordagem microgenética na matriz histórica-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade**. Caderno Cdes, Campinas, XX, n. 50, p. 21-29, 2000.

PRUSKI, F. F.; SILVA, D. D.; TEIXEIRA, A. F.; SILVA, J. M. A.; CECÍLIO, R. A.; SLIVA, D. F. Chuvas intensas para o Brasil. In: **Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola**, 31, 2002, Salvador. Anais... Salvador: Sociedade Brasileira de Engenharia agrícola, 2002.CD-Rom

SANTOS, G. G.; FIGUEIREDO, C. C.; OLIVEIRA, L. F. C.; GRIEBELER, N. P. Intensidade- duração- frequência de chuvas para o Estado de Mato Grosso do Sul. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v.13, p.899-905, 2009.

SILVA, F. G. da; CARNEIRO, C. D. R. Geotecnologias como recurso didático no ensino de Geografia: experiência com o Google Earth. *Caminhos de Geografia*, Uberlândia, p. 329-342, 2012.

SIMMONS, G.F., **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: McGraw-Hill 1988.

Zabel, Marília. **Luz, Câmera, Flashes: Uma Compreensão sobre a Disciplina de Prática de Ensino de Matemática a Distância**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista – UNESP. Rio Claro-SP, 2014.

Sobre os autores

Fábio José da Costa Alves: Licenciado em Matemática, Engenharia Civil, Mestrado e Doutorado em Geofísica, Professor da Universidade do Estado do Pará e Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação e Professor Titular da Universidade da Amazônia. fjca@uepa.br

Alberto Carlos de Melo Lima: Engenharia Civil, Mestrado e Doutorado em Hidráulica e Saneamento, Professor da Universidade do Estado do Pará e Professor Titular da Universidade da Amazônia, Conselheiro em Recursos Hídricos da Secretaria de Estado de Meio Ambiente do Estado do Pará (SEMA/PA). acmlima@gmail.com

Recebido em: 24/09/2015

Aceito para publicação em: 15/10/2015