

História para o ensino de matemática: fundamentos epistemológicos, métodos e práticas

History for teaching mathematics: epistemological grounding, methods and practices

Iran Abreu Mendes
Universidade Federal do Pará (UFPA)
Belém – Pará - Brasil

Resumo

Este artigo traz reflexões acerca dos usos da história no ensino da matemática em busca da constituição de uma epistemologia didática que implique na formação conceitual e didática de professores de matemática, bem como no ensino de matemática na Educação Básica. Tais usos emergem dos estudos realizados durante quase três décadas, nos quais a história foi tomada como um reorganizador conceitual e didático da matemática escolar na forma de sequenciais históricos para usos teóricos e experimentais e sala de aula. Os estudos realizados possibilitaram a elaboração de propostas práticas de ensino que envolvem relações entre história e matemática que priorizem a investigação histórica como um princípio de ensino, de aprendizagem e de socialização do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Ensino de matemática; História no ensino, Atividades investigativas.

Abstract

This article reflects on the uses of history in the teaching of mathematics in search of the constitution of a didactic epistemology that implies the conceptual and didactic formation of mathematics teachers, as well as the teaching of mathematics in Basic Education. Such uses emerge from studies carried out for nearly three decades, in which history was taken as a conceptual and didactic reorganizer of school mathematics in the form of historical sequences for theoretical and experimental uses and in the classroom. The studies carried out enabled the elaboration of practical teaching proposals that involve relations between history and mathematics that prioritize historical investigation as a principle of teaching, learning and socialization of mathematical knowledge.

Keywords: Mathematics teaching; History in teaching, Investigative activities.

Introdução

Nos meios acadêmicos relacionados à área de Educação Matemática muito se tem discutido sobre as tendências híbridas da pesquisa em História da Matemática, constituída nas últimas cinco décadas do século XX e início do século XXI. Desde a década de 1990 (por volta de 1993) meus estudos e pesquisas focaram na pesquisa em história da matemática com vistas à concretização e organização de métodos de ensino, em cujas abordagens didáticas apostassem na formação de um estudante mais pensante, criativo, investigativo e autônomo em seu processo intelectual.

Em consequência da busca de algumas modalidades didáticas que se ancorassem em princípios de um ensino que contribuíssem à formação de um espírito investigativo no estudante em seu processo de aprendizagem da matemática escolar, meus estudos evidenciaram a possibilidade de exercitar modelos pedagógicos de ensino que utilizassem a história da matemática como um agente de cognição na Educação Matemática ou como um reorganizador cognitivo nas aulas dessa disciplina. As noções conceituais *história da matemática como um agente de cognição na Educação Matemática* e *história como um reorganizador cognitivo* nas aulas de matemática foram se constituindo ao longo do desenvolvimento de minha pesquisa doutoral (1998-2001) e passaram a incorporar-se aos fundamentos teóricos que compõem os princípios advogados por mim, ao longo de três décadas, a respeito da pesquisa em história para o ensino de matemática.

O sentido dado aqui tanto ao termo agente de cognição quanto ao termo reorganizador cognitivo diz respeito à necessidade de se tomar a história como uma possibilidade de dar aos estudantes uma oportunidade de se desafiarem a estabelecer um processo de criatividade matemática na sua aprendizagem diária durante o processo educativo mediado pelo professor (MENDES, 2006, 2009a, 2009b). Tais desafios conferem também aos professores a oportunidade de tomar a história para reorganizar suas unidades temáticas de ensino, suas atividades didáticas e suas formas de aprender a própria matemática que precisam saber para ensinar (MENDES, 2020)

Para que tal exercício cognitivo de criação matemática ocorra na perspectiva aqui assumida, se faz necessário que o professor lance continuamente em sala de aula, uma prática desafiadora na qual seus estudantes se aventurem na busca de sustentação ou revalidação

de verdades estabelecidas ao longo da pesquisa histórica, tendo em vista o aumento de seu domínio educativo em Matemática.

Desde o início da década de 1990 fiz diversos investimentos cognitivos, experiências e reflexões acerca do uso da história no ensino da Matemática por meio de estudos e pesquisas voltados à organização e avaliação de experiências na formação inicial e continuada de professores e suas implicações no ensino de Matemática na Educação Básica. Neste artigo considero importante refletir sobre a possibilidade de reencaminhar minhas discussões favoráveis a uma abordagem didática para o ensino da matemática que tome sempre como princípio a investigação histórica e a busca de informações como um basilar para a aprendizagem e socialização dos conhecimentos matemáticos em diálogos com as relações socioculturais.

Para descrever o início dessa trajetória epistemológica, considero necessário esclarecer uma questão interrogativa sobre o tema. Quando alguém se depara pela primeira vez com a expressão *o uso da história no ensino da matemática*, quase sempre se confunde por pensar que se trata apenas do uso de narrativas que se referem a datas, nomes, locais e feitos heroicos relacionados à Matemática e muitas vezes desvinculados dos conteúdos que os professores se propõem a ensinar a seus estudantes. No entanto, o que sempre procuro esclarecer é que, quando menciono meu posicionamento acerca dos usos da história no ensino da matemática, me refiro às explorações didáticas da história das ideias produzidas em territórios espaço-temporais e como, atualmente, elas podem ser refletidas na matemática que ensinamos.

Todavia, procuro detalhar, mais ainda, que tais ideias foram produzidas para explicar os fenômenos naturais, sociais e culturais, independentemente do vínculo que cada fenômeno possa ter com determinados contextos como a religião, a arte, a matemática, a física, etc... A finalidade maior é esclarecer o vínculo direto da matemática com relação às práticas desenvolvidas historicamente no contexto da sociedade e da cultura como uma forma de solucionar problemáticas relacionadas à sobrevivência humana no planeta.

A partir de 2001 passei a reestruturar meus posicionamentos acerca das perspectivas teóricas e práticas voltadas ao uso da história nas aulas de matemática considerando a necessidade de retomar os princípios investigativos que sempre estiveram presentes em meus estudos iniciais, fortemente influenciados pelo uso de projetos de investigação no

ensino de matemática, muito exercitados por mim entre 1989 e 1996. Nesse momento, então, percebi a importância de redirecionar minhas reflexões teóricas e práticas a respeito do tema história no ensino da matemática e, entre 2001 e 2010 passei a enfatizar mais a inclusão das dimensões históricas e culturais nas atividades realizadas no ensino de graduação e pós-graduação.

Com base nos exercícios de pesquisa e prática docente realizada ao longo desses anos redirecionei meu programa de pesquisa e inseri estudos e atividades investigativas acerca da história não hegemônica (história de práticas socioculturais). Com esse exercício investigativo e didático, defendo que o uso da história nas aulas de matemática só terá importância se exercitarmos uma recriação da história da matemática na qual os envolvidos no processo de aprendizagem reflitam a respeito das estratégias sociocognitivas (pensamentos e ações) criadas e praticadas ao longo da história humana para explicar e compreender tais fatos matemáticos no contexto sociocultural em que se desenvolveram.

A esse respeito, desde o final da década de 1990 investigo as histórias de diversas práticas socioculturais como o comércio, a navegação, a arquitetura, a engenharia militar, as artes em geral, dentre outras atividades profissionais que possam contribuir na construção de uma epistemologia das práticas matemáticas em contextos socioculturais e históricos. Meu interesse passou então a ser o seguinte: verificar como as matemáticas estão presentes nessas práticas e de que modo será possível incorporá-las nas atividades de ensino e de aprendizagem matemática na Educação Básica e na formação de professores e matemática.

Foi com esse intuito que na formação de professores de matemática passei a utilizar informações geradas em trabalhos já realizados por historiadores, antropólogos, cartógrafos, astrônomos e jornalistas, de modo a obter informações de interesse didático para o meu trabalho docente. Para tanto, busquei informações em fontes primárias e secundárias por considerar a necessidade de reorganização dos fatos históricos de acordo com as construções matemáticas intencionadas por mim, conforme os objetivos didáticos estabelecidos para as disciplinas ministradas na graduação, tendo em vista suas implicações nas ações docentes na Educação Básica.

Neste artigo reflito sobre trajetórias de usos da história no ensino da matemática por onde e como atravessei, em busca da constituição de uma epistemologia didática que implicasse na formação conceitual e didática de professores de matemática, bem como no ensino de matemática na Educação Básica. Tais trajetórias caracterizam-se nos estudos

realizados por mim durante quase três décadas, nos quais tomei a história como um reorganizador conceitual e didático da matemática escolar. Os estudos realizados me levaram a reorganizar e reencaminhar minha proposta prática sobre possíveis relações entre história e ensino de matemática que priorizem a investigação histórica como um princípio de ensino, de aprendizagem e de socialização do conhecimento matemático.

Do conhecimento histórico ao conhecimento matemático

Nesta seção apresentarei reflexões teóricas conhecimento histórico e desenvolvimento histórico da matemática e seus usos no ensino, a partir de minhas interpretações sobre teorias da história que tratam sobre a pesquisa histórica e a escrita do conhecimento histórico (historiografia), com a intenção de apontar possíveis modos de apropriação da matemática produzida historicamente para a escrita de textos que possam ser tomados como aportes para que os professores compreendam como foram se estabelecendo em espaços-temporais, os diversos processos de compreensão, explicação e invenção por meio da matemática. Trata-se de oferecer indicativos para que os professores de matemática em formação inicial ou continuada possam exercitar suas reflexões em busca de compreensões sobre a gênese e desenvolvimento da matemática e identifiquem o lugar desse conhecimento na sua formação conceitual e didática, e assim se familiarizem com as multiplicidades de processos estabelecidos na história da matemática como princípios e métodos viáveis para se produzir e ensinar matemática.

De acordo com *Marrow (1975)*, a história como conhecimento produzido para registrar fatos e acontecimentos, é inseparável do historiador, cuja participação ativa na elaboração de documentos históricos, exige criação de condições e meios para a compreensão das suas descobertas sobre os acontecimentos ocorridos no passado. Essa compreensão admite que a história registrada reflète os interesses da época em que foi escrita e a busca do conhecimento a esse respeito se caracteriza pelo processo de pesquisa histórica para compreender e explicar os modos como foram explicitados os fatos e quais suas conexões com os interesses de cada sociedade em cada época. Daí a importância e a utilidade dos estudos históricos, sob diferentes enfoques, conforme a escola filosófica em que cada modo de pesquisar se fundamenta.

Nessa direção, *Schaff (1994)* assevera que embora os métodos e técnicas de pesquisa histórica sejam aperfeiçoados constantemente, conforme os modelos epistemológicos

adotados por cada grupo de afiliações teóricas sobre o que é escrever a história, os pesquisadores desse campo julgam e interpretam as mesmas questões e acontecimentos e apresentam, cada um, os fatos, a sua maneira, ou seja, escrevem a história conforme parâmetros adotados para interpretar as informações, e incorporam o caráter científico à história escrita, conectando objetividade e subjetividade, do modo mais harmônico possível, em um processo historiográfico (escrita da história), tendo em vista responder suas questões de pesquisa.

Ainda com base em Schaff (1994) compreendo que significa buscar equilíbrio entre os elementos que compõem o sistema de referência tomado pelo historiador para selecionar, reunir e encadear as informações sobre os fatos, de modo a produzir objetividade no conhecimento histórico produzido, mesmo sem deixar de admitir a subjetividade de quem escreve cada história.

Outro aspecto importante de se comentar nessa seção é a respeito do pensamento histórico, que se torna especificamente científico ao seguir os princípios da metodização, ou seja, ao seguir regras e operações de consciência histórica para construir argumentos narrativos válidos, tornando-se assim um pensamento histórico racional, pois com base nas ponderações de Jörn Rüsen (2001; 2007), é importante destacar que:

metodização significa sistematização e ampliação dos fundamentos que garantem a verdade. Somente quando esse ponto de vista é adotado para os diversos fatores da matriz disciplinar é que estes se transformam em estrutura de uma matriz disciplinar. Pode-se recorrer também à conhecida definição de Thomas Kuhn: a metodização do pensamento histórico em geral significa dar forma de paradigma aos fundamentos da ciência da história (RÜSEN, 2007, p. 13-14).

Portanto, ao refletir sobre algumas pontuações de Rüsen (2001; 2007) conforme foi exposto anteriormente, considero fundamental a reorganização de nossas reflexões acerca da premissa de que a busca do conhecimento científico cria situações interrogativas em nós seres humanos, que acabam por nos levar a buscar continuamente as mais importantes respostas para essas questões do tipo: de onde vem esse conhecimento e como se materializou seu desenvolvimento em momentos espaço-temporais?

A esse respeito retomo princípios estabelecidos por Rüsen (2001; 2007) acerca da razão histórica e da reconstrução do passado por meio da pesquisa e escrita histórica, para compreender que:

(...) é difícil encontrar um conceito característico para o que acontece com as formas de apresentação do conhecimento histórico, quando este conhecimento se transforma em ciência. De início, a apresentação ganha novas formas discursivas, especificamente científicas, e perde com isso as possibilidades de expressão literária, já que essa expressão não é compatível com as garantias científicas de validade das sentenças históricas (RÜSEN, 2007, p. 16).

A razão histórica a qual me refiro no parágrafo anterior está relacionada ao conceito de racionalidade, ao qual estão sujeitas às contínuas modificações dos modos de estabelecer interrogações e interpretações históricas e as interdependências entre seus aspectos socioculturais, ou seja, significa que nos tipos de *episteme* em que ancoramos nossas formas de conformar nossas explicações históricas, tanto no modo de pesquisar como no estilo de escrita da histórica. Em relação à historiografia da ciência, Kragh (2003) argumenta que essa é uma questão que está condicionada ao modo de decidir:

até que ponto o historiador deverá aceitar o comportamento real dos agentes históricos e o curso real dos acontecimentos, tal como estes são revelados pelas melhores fontes possíveis, como constituindo uma explicação; ou se deveria talvez criticar o agente por não ter agido com racionalidade suficiente, [ou seja], investigar se as motivações do agente eram bem fundamentadas em relação à norma de racionalidade dessa época (ou do presente (KRAGH, 2003, p. 74).

Tal ponderação de Kragh (2003) leva a admitir que poder-se-ia admitir que o conhecimento partilhado por nós hoje, provém de diferentes fontes de informações produzidas por diversos grupos socioculturais que se organizaram e se desenvolveram intelectualmente de acordo com suas necessidades, interesses e condições de sobrevivência, levados pela mobilidade característica da sociedade humana. Importante, também, é percebermos como as mobilizações de informações históricas puderam contribuir para a disseminação desse conhecimento e seu redimensionamento em direção à novas explicações sobre acontecimentos sucessivos ocorridos em contextos espaço-temporais.

Nessa esteira, pode-se considerar que a matemática, como qualquer campo de conhecimento humano, tem seu desenvolvimento processual capaz de caracterizá-la como uma ciência que também se desenvolve com base em sua própria produção histórica. Minha afirmação baseia-se nos fatos de fontes documentais que mostram o quanto as matemáticas anteriormente produzidas foram tomadas como base de edificação matemática em

momentos posteriores, ou seja, foram tomadas como subsídios para a reorganização e ideias em busca de novas soluções para novos problemas surgidos.

Se seguirmos esse modelo de pensamento sobre o desenvolvimento da matemática podemos buscar nesses fatos, as chaves para processos de criação e descobertas, que expressaram características de revoluções para os modos de apresentar novas explicações sobre desafios surgidos e que nos mostram o caráter criativo da espécie humana quando se dispõe a elaborar e disseminar a ciência matemática no seu meio sociocultural. Cabe-nos, entretanto, o cuidado de saber buscar na história da matemática a medida adequada das coisas que podem contribuir para nos tornarmos capazes de adquirir o espírito presente nesse conhecimento.

Na medida em que procuramos compreender a matemática como uma forma de expressão da ciência, surgem alguns questionamentos que merecem atenção: qual a relação da produção de conhecimento matemático com a história sociocultural humana? Qual a importância da história para compreendermos o desenvolvimento da matemática em seus aspectos conceituais e didáticos? Como as informações conceituais e didáticas advindas da história da matemática podem ser utilizadas para se ensinar matemática? Tentar encontrar indícios favoráveis a elaboração de argumentos que possam responder tais questionamentos faz parte de nossa inquietação, que mobilizou estudos e pesquisas que originaram reflexões teóricas e a descrição de experiências relacionadas ao tema tratado neste livro.

Em relação ao primeiro questionamento, é importante lembrar, inicialmente, que a matemática faz parte de um aglomerado de informações existentes no arcabouço cultural da humanidade que, com o decorrer do desenvolvimento da consciência humana assumiu determinada forma, adquirindo, portanto, o caráter de ciência à medida que apresentou características peculiares para tal. Para admitir ou reconhecer o *status* científico da matemática é necessário, então, recorrer ao seu desenvolvimento estrutural através da busca de informações contidas no passado de sua construção processual construtiva. Neste sentido, a matemática tem na história humana a base de apoio para o reconhecimento de seu caráter científico.

O segundo questionamento me faz refletir acerca do que há a mais íntima conexão entre a matemática e a sua história, o que serve para explicar o fato de serem ou terem sido os matemáticos profissionais os mais importantes historiadores da matemática. Essa conexão nos conduz ao entendimento da relação entre a matemática e a história assim como da

utilidade da história para a matemática, pois, como sabemos, a fonte de novas descobertas na matemática esteve pautada, muitas vezes, nos problemas e soluções apresentados no passado. Isso nos faz pensar acerca das diferentes formas de apresentação e demonstração de vários teoremas e postulados matemáticos fornecidos por fontes históricas e que podem nos levar à novas elaborações, de acordo com nossas necessidades e interesses, conforme mencionei anteriormente.

Quanto ao terceiro questionamento, é importante enfatizar que o mesmo se constitui no objeto principal de estudo discutido neste livro, pois a investigação histórica como uma possibilidade metodológica para o ensino da matemática tem despertado interesse dos educadores matemáticos, desde a década de 1990, preocupados com o processo de construção de explicações coerentes, lógicas, com sentidos e significados, para o conhecimento matemático produzido, a partir da utilização da informações sobre o desenvolvimento histórico da matemática como recurso para tal.

É importante, entretanto, buscarmos estabelecer princípios que sustentem esse processo de utilização da história, de modo que façamos uso do mesmo durante a elaboração e utilização de atividades de ensino de matemática apoiadas no seu conhecimento histórico. Todavia, para que se possa avançar nessa direção é necessário que cada interessado se aproprie da matemática produzida historicamente, no sentido de compreender e explicar interpretações acerca dos modos de conhecer e explicar essa matemática produzida.

Relações conceituais e didáticas nas histórias para ensinar matemática

Ao longo dos últimos anos uma das preocupações dos pesquisadores e professores é: como tornar mais acessível aos estudantes, a matemática que se ensina, ou seja, como desenvolver competências e habilidades investigativas no ensino de matemática de modo a melhor esclarecer sobre o desenvolvimento conceitual da matemática que ensinamos e assim promover uma aprendizagem mais sólida sobre esse conhecimento escolar? Essa questão pressupõe que o aperfeiçoamento da prática pedagógica poderá contribuir para a resolução dos desafios propostos à produção do conhecimento em matemática.

Essa relação entre os referenciais didáticos e os processos pedagógicos estão ligadas por processos intencionais, deliberados, cujo objetivo é promover, em contextos culturais definidos e de modo sistematizado, relações significativas entre o aprendiz e o conhecimento produzido pelos homens em seu processo social e histórico de produção das condições

materiais de sua existência. Assim sendo, adoto como pressuposto que o conhecimento não se produz somente na escola, posto que é nas relações socioculturais em seu conjunto, que se torna necessário diferenciar os tipos de processos pedagógicos para se ensinar e promover aprendizagem.

Um dos primeiros estudos preocupados com a implicação da história no ensino da matemática, no Brasil, foi realizado por Ema Prado (1990), com a finalidade de analisar a experimentação de uma proposta de ensino de matemática baseada na ordem histórica em que o conhecimento foi produzido, tendo como elemento norteador o princípio genético no ensino e a lei biogenética fundamental de Haeckel (séc. XIX), que defende a história da matemática como um recurso eficaz para o ensino da matemática, apoiado nas ideias de Poincaré, Klein, Polya e Kline, os quais, entre outros, defendem o princípio de que o *aprendizado efetivo requer que o aprendiz retrace os principais passos na evolução histórica do assunto estudado* (PRADO, 1990, p. 10).

Esse princípio, denominado princípio recapitulacionista, pressupõe que alguns conceitos matemáticos surgem naturalmente no estudante e historicamente aparecem somente após outros conceitos iniciais, como é o caso do zero, por exemplo. Desse modo, deve-se ter um pouco de cautela na utilização desse postulado quando se utilizar à história no ensino de matemática.

Outra relação entre a matemática, a história e a educação matemática originou-se de um estudo minucioso realizado por Antonio Miguel (1993), no qual discute aspectos relacionados às funções pedagógicas da história, como fontes de: motivação para o ensino e aprendizagem matemática; seleção de objetivos e procedimentos de ensino; recreação e ludicidade, heurísticas a serem incorporadas às atividades de ensino; desmistificação da matemática como uma ciência acessível a todos e relacionada às atividades socioculturais e educativas da espécie humana; formalização de conceitos matemáticos com base na evolução histórica desses conceitos; dialética; de unificação dos vários campos da matemática; conscientização epistemológica; significação por promover uma aprendizagem compreensiva da matemática; cultura; e de epistemologia, entre outras.

Com base em minha leitura e interpretação, considero que tais funções atribuídas à história se manifestam como um *agente de condução do processo ensino e de aprendizagem da matemática* apresentam alguns argumentos que demonstram as posições filosóficas dos educadores matemáticos acerca do assunto. Entretanto, antes de adotar qualquer posição

referente ao uso ou não da história no ensino da matemática, é importante saber que a matemática está presente nas propostas e currículos oficiais de ensino bem como nos livros didáticos utilizados em sala de aula, e muitas vezes é tratada como um conhecimento pré-concebido, sem nenhum contexto histórico que esclareça sobre sua construção conceitual.

Utilizei essa expressão *história como agente de condução do processo ensino e de aprendizagem da matemática*, mencionada no parágrafo anterior, em diversos trabalhos que publiquei desde 2001, como um embrião de uma expressão conceitual que ampliei e estruturei ao longo de duas décadas de estudos, pesquisas e reflexões teóricas, passando por um processo de organização conceitual até ser enunciada sob três denominações como: 1) *a história como acionador cognitivo no ensino de matemática*; 2) *a história como reorganizador cognitivo e didático no ensino de matemática* e, por fim 3) *A história como um agente de cognição na aprendizagem matemática*. Posteriormente denominei de *A história como um agente de cognição na educação matemática*.

Em 2010, realizei uma extensão conceitual dessa noção denominando-a de *a história como um mediador didático e conceitual no ensino de matemática*, tendo em vista subsidiar a fundamentação e uma pesquisa que focava a inserção desses princípios no ensino de matemática para os anos iniciais e para os cursos de Pedagogia. Em síntese, enfatizo que essas noções conceituais compõem um movimento em torno dos princípios sustentadores das ponderações teóricas e metodológicas que contornam, se interconectam e se internalizam e definem meus estudos e pesquisas desde 2001.

Todavia, considerando as dificuldades dos professores em inserir as informações históricas nas ações de ensino, principalmente porque as referências históricas quase sempre não aparecem nos livros didáticos, para que possam utilizá-las em suas ações docentes, proponho que o professor adote informações históricas como fontes de esclarecimentos conceituais e enriquecimento pedagógico, para conduzir suas ações docentes, nas quais o estudante investigue, discuta, sintetize e aprenda noções matemáticas desenvolvidas em épocas anteriores ao nosso tempo sem admiti-las como definitivas, e sim compreendendo que os aspectos históricos podem explicitar os processos de construção da matemática, que em cada momento das aulas poderão ser usados para a compreensão de quem as aprende.

Atividades históricas para aprendizagem matemática

Em minhas ações na pesquisa-formação com professores, utilizei a história da matemática na elaboração de objetivos e procedimentos de ensino em busca de aprendizagem a fim de possibilitar a seleção e aplicação de problemas práticos, curiosos ou recreativos a serem incorporados de maneira episódica e investigativa nas aulas de matemática. Para alcançar os objetivos previstos tomei o ensino por investigação como princípio de construção do conhecimento matemático pelos professores em formação inicial ou continuada.

O primeiro desafio aos professores foi aprender a pesquisar o material histórico necessário à organização da ação docente e daí poderem elaborar atividades investigativas para a sala de aula. A investigação histórica foi tomada como um modo de reconstrução da matemática produzida em diferentes contextos socioculturais e em diferentes épocas da nossa história. Trata-se de pesquisar as histórias para organizar um sequencial histórico-conceitual a ser utilizado na formação conceitual e didática dos professores.

O uso didático de atividades investigativas pressupõe uma mútua colaboração entre professor e estudante durante o ato de construção do saber, pois a característica essencial desse encaminhamento de ensino pressupõe que a matemática ser aprendida emerge da pesquisa histórica e do modo como a aprendizagem for conduzida pelo professor até que seja incorporada à estrutura cognitiva do aprendiz. Porém, é fundamental estabelecer níveis de estruturação do trabalho com os estudantes, bem como a extensão das etapas de estudo a ser percorrida por eles para atingir as metas de aprendizagem planejadas pelo professor ou pelo pesquisador que decida utilizar essa estratégia de investigação histórica como um mediador didático-conceitual.

Nessa abordagem, o material histórico torna-se imprescindível para a elaboração das atividades por conter informações ligadas às diversas interpretações dadas ao mesmo tema matemático por diferentes matemáticos, em diferentes épocas da história. Uma sugestão é incorporar as informações históricas ao modelo de atividades proposto por *Dockweiler* (1996) para o ensino de matemática, centrado em três pontos importantes, em um processo contínuo de construção de conceitos matemáticos, desenvolvimento de habilidades, culminando com a capacidade de aplicar esses conceitos à solução de situações-problema que possam surgir, conforme o infográfico apresentado a seguir:

Figura 01. Infográfico descritor do modelo de Dockweiler.

Fonte: Elaboração do autor com base em Dockweiler (1996).

A partir da experiência manipulativa ou visual do estudante surgem as primeiras manifestações do conhecimento apreendido durante esse contato, que devem ser expressos através da verbalização, ou seja, pela comunicação oral do estudante em sala de aula, pelas discussões entre os colegas, de modo que possam provocar a necessidade de representação dessa aprendizagem através da simbolização, já que esta última evidencia o grau de abstração no qual o estudante se encontra em relação ao conhecimento construído durante a atividade.

A esse respeito, uma reflexão mais ampla acerca dos tipos de atividades propostas por Dockweiler (1996), possibilita um melhor posicionamento quanto ao aspecto metodológico da pesquisa-formação realizada. Neste sentido, o modelo de Dockweiler apresenta três tipos de atividades: de desenvolvimento, de associação ou conexão e de simbolização, que priorizam o processo interativo do estudante com seu objeto de conhecimento, de modo a conectar aspectos matemáticos, psicológicos e sociais, ou seja, procurando ver o estudante por inteiro.

As *atividades de desenvolvimento* permitem ao estudante experimentar matematicamente, familiarizando-se com os conceitos iniciais, tendo em vista as novas construções conceituais até chegar ao processo de verbalização das ideias construídas através do contato direto com os fatos.

As *atividades de Associação ou conexão* devem enfatizar processos a partir dos quais os conceitos aprendidos pelos estudantes nas experiências e manipulações, necessitam ser verbalizados para dar evidências do que aprendeu, como forma de comunicar seu crescimento intelectual, suas dúvidas e questionamentos. Nesse momento podem ser usadas

outras atividades que conduzam o estudante a expressar o conhecimento por meio de sua comunicação oral.

As *atividades Simbólicas ou Abstratas* são aquelas por meio das quais o professor pretende conduzir os estudantes a um estágio mais avançados de representações simbólicas do conceito construído que, para isso, precisam ter um domínio de comunicação oral ao qual, por sua vez, deverá ser gerado das experiências manipulativas. Significa, portanto, um processo interativo contínuo entre as componentes manipulativas, as expressões de comunicação processual e as representações simbólicas.

Tem-se, portanto uma visão mais ampla sobre o uso de atividades manipulativas/investigativas para o ensino de matemática e somente a partir dessas relações é possível apresentar uma ou mais maneiras de conceber o ensino de matemática através de uma concepção dinâmica, participativa e construtiva com base no material histórico.

Experiências formativas para a docência

Em minhas experiências relativamente ao assunto, realizei estudos teóricos e experimentais concernentes à inserção de uma abordagem investigativa em história da matemática por meio de atividades para a formação de professores e para fortalecer suas experiências na superação de suas dificuldades conceituais e didáticas. Nessas experiências obtive resultados que me levaram a decidir propor outros tipos de atividades que atendessem às necessidades evidenciadas nas situações desafiadoras que emergiram durante minha trajetória profissional na formação inicial e continuada de professores em ações de ensino.

Nesse percurso que surgiu a possibilidade de realizar diversos trabalhos voltados ao uso da problematização e da investigação histórica na formação inicial e continuada de professores com relação ao uso integrado dessas abordagens nas aulas de matemática como fundamento epistemológico e pedagógico para ensinar matemática, ancorado na história sustentada pela tríade expressa pela mediação didática e conceitual, na qual as informações históricas possibilitariam a exploração conceitual pelos alunos a partir de um processo de mediação didática conduzida pelo professor.

Nesse movimento desenvolvi atividades que exigia a participação de todos os envolvidos no processo educativo, visto que os resultados obtidos possibilitariam a identificação de pontos decisivos para a elaboração de uma proposta de ensino de

matemática a partir de atividades investigativas que envolvessem o desenvolvimento histórico conceitual de temas matemáticos necessários à aprendizagem dos estudantes.

Com essa intenção estabeleci os objetivos dos cursos de formação realizados, a fim de tomar o desenvolvimento histórico da matemática como agente de cognição matemática de quem aprende, ou seja, como fonte de aprendizagem matemática, para discutir a importância do uso da história no ensino de matemática em conexão com processos investigativos e problematizadores sobre temas matemáticos, que muitas vezes eram atravessados por práticas socioculturais, de acordo com cada local ou época em que tais conhecimentos matemáticos era tomados historicamente para o desenvolvimento conceitual em sala de aula (MENDES, 2007).

Esses cursos foram planejados e executados na forma de proposta de ensino de temas matemáticos por meio de atividades associadas às informações conceituais extraídas da história da matemática, e seguiam basicamente a seguinte estrutura: 1) Sondagem do conhecimento dos professores a respeito do assunto a ser abordado no curso; 2) Leitura e discussão de textos a respeito de história da matemática e sua relação com o ensino da matemática; 3) Leitura e discussão de textos acerca do ensino da matemática por meio de atividades investigativas fundamentadas nas informações históricas; 4) experimentações práticas com atividades investigativas voltadas ao ensino de matemática, baseadas nas informações históricas; avaliação das atividades elaboradas pelos professores com orientações do ministrante e 5) reformulação as atividades a partir da avaliação.

Tais cursos enfatizavam um ensino de temas matemáticos com os objetivos de praticar atividades históricas investigativas com o uso de textos de história da matemática, para a abordagem de temas matemáticos como por exemplo:

- História da matemática como aporte pedagógico;
- História da matemática na formação de professores;
- Perspectiva investigativa em história da matemática
- Desenvolvimento histórico do conceito de número e sistemas de numeração;
- História da geometria e trigonometria;
- História dos números negativos e irracionais;
- Desenvolvimento histórico das equações algébricas;
- História dos logaritmos e das funções.

A respeito do desenvolvimento de temas como os mencionados anteriormente esclareço que há diversas modalidades de usos investigativo da história da matemática para promover a aprendizagem escolar dos estudantes que, conforme a finalidade do professor, podem ser experimentadas em cada situação na sala de aula, como por exemplo:

- Atividades manipulativas extraídas diretamente da história da matemática;
- Atividades manipulativas adaptadas da história da matemática;
- Desenvolvimento de projetos de investigação temática;
- Investigação de problemas históricos;
- Estudos de textos históricos adaptados de fontes primárias;
- Estudos de textos históricos extraídos de fontes primárias;
- Elaboração e utilização de vídeo-aulas baseadas em textos históricos de fontes primárias ou secundárias.

Cada modalidade de investigação histórica abordada nas aulas de matemática requer do professor um pouco de conhecimento do nível de amadurecimento dos estudantes, do grau de aprofundamento a dar no assunto a ser abordado em sala de aula e do nível de autonomia dos estudantes com relação a aprendizagem. Além disso, é necessário se fazer um levantamento prévio do material a ser utilizado nas investigações, localização das fontes de pesquisa ou, se for o caso, a seleção de atividades a serem aplicadas junto a cada turma, de acordo com o tópico de aprendizagem matemática tomado como referência para desenvolvimento da investigação histórica.

Fazendo a prática e refletindo teorias

Para analisar o uso de atividades investigativas baseadas no desenvolvimento histórico da matemática vivenciei diversas experiências que me levaram a validação das teorias e métodos adotados, sempre com foco na contextualização global da matemática advinda das histórias tomadas como acionadoras da cognição dos estudantes através das atividades realizadas. O processo de planejamento, execução, análise e validação das experiências foi materializado por meio de observações, entrevistas, questionários, resultados de testes aplicados, etc.

Entretanto o ponto mais importante do procedimento metodológico das experiências e pesquisas diz respeito a uma elaboração matemática pelos estudantes a partir dos estudos bibliográficos, práticas experimentais realizadas, reflexões estabelecidas sobre os assuntos investigados e a sistematização do conhecimento construído por eles, caracterizando assim as conexões construtivistas provocadas pela curiosidade expressa nas problematizações

históricas como agentes de construção, significação e formalização do conhecimento matemático escolar, de maneira integrada, implicando em aprendizagem de temas matemáticos como números, geometria, trigonometria plana, logaritmos, equações, dentre outros.

Um exemplo dessa proposta prática articulada aos objetivos do ensino da matemática se concretiza quando apresentamos aos estudantes uma história-narrativa sobre os aspectos conceituais envolvendo Ptolomeu e seus estudos sobre as cordas da circunferência. Nossa principal finalidade não é apenas apresentar um texto com informações dos fatos históricos em si. O que pretendemos, na verdade, é fazer com que os estudantes percebam nas informações apresentadas, o caráter investigativo presente nessa narrativa de modo que, através dela, eles procurem formular relações matemáticas que justifiquem o surgimento das razões trigonométricas a partir da exploração de certas propriedades matemáticas presentes, tais como: semelhança de triângulos, paralelismo, proporcionalidade entre outros princípios geométricos que conduzem à noção de seno de um ângulo como a razão entre o cateto oposto a um ângulo agudo e a hipotenusa do triângulo retângulo.

Da mesma maneira, nos valem da narrativa histórica para que os estudantes retomem os aspectos conceituais relacionados ao teorema de Pitágoras e conectem ao estudo das cordas da circunferência de modo a manipular criativamente a matemática envolvida até elaborar uma relação fundamental da trigonometria, pois é através da leitura e discussão dos aspectos matemáticos presentes nas informações históricas referentes tanto ao teorema mencionado quanto ao estudo das cordas, que eles conseguirão estabelecer e validar tal relação, conseguindo, assim, mostrar materialmente a relação fundamental da trigonometria: $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$.

É na exploração desses aspectos matemáticos resgatados das informações históricas que é possível aos estudantes, compreenderem a ampliação das noções básicas das razões trigonométricas até o estabelecimento das funções trigonométricas no sistema de coordenadas representado pelos eixos seno e cosseno. As atividades possibilitam uma discussão entre o professor e os estudantes ou somente entre os estudantes e, certamente favorecem uma compreensão plena dessas noções trigonométricas, na passagem da experiência física/visual para a simbolização, sugerido no modelo de Dockweiler (1996).

Em outra experiência com estudantes de licenciatura em matemática tomei a história como fonte geradora do conhecimento matemático por meio da investigação histórica em sala de aula, com enfoque na aprendizagem de função, a partir de seus fundamentos históricos e epistemológicos. A esse respeito desenvolvi uma experiência de investigação histórica com um doze (12) estudantes de licenciatura em matemática, na disciplina *Fundamentos Epistemológicos da Matemática*, durante um semestre letivo.

Inicialmente tomei como ponto de partida uma sondagem das dificuldades dos estudantes com relação ao conhecimento sobre funções e suas conexões com as diversas áreas da matemática, bem como o seu desenvolvimento histórico conceitual. Minha intenção era verificar discontinuidades conceituais decorrentes da formação deles, pressupondo que a história da matemática poderia se constituir em um agente condutor da superação de tais discontinuidades.

Assim, um estudo histórico e epistemológico sobre o pensamento funcional para levantar a gênese e a evolução desse conceito, como também, para compreender em quais circunstâncias históricas foi elaborado o conceito de função. O referido estudo histórico foi feito antes da realização das experiências tendo em vista subsidiar o trabalho, a fim de contribuir para um maior aprofundamento no assunto e consecução do meu objetivo.

Inicialmente, organizei a turma em quatro grupos de três (3) componentes, e orientei a elaboração e desenvolvimento de quatro microprojetos de investigação sobre o desenvolvimento histórico-epistemológico de funções, intencionando mostrar a importância do desenvolvimento histórico das noções de função e sua formalização conceitual, as implicações desse processo no desenvolvimento de outras áreas de conhecimento, bem como no ensino da matemática escolar (ensino fundamental e médio), em quatro enfoques:

- a) um estudo histórico-epistemológico do conceito de função na Antiguidade (Egito e Babilônia) e suas contribuições para sala de aula;
- b) um estudo histórico-epistemológico do conceito de função na Índia e China e suas contribuições para sala de aula;
- c) um estudo histórico-epistemológico do conceito de função na idade Moderna e suas contribuições para sala de aula;
- d) um estudo sobre o desenvolvimento das funções algébricas racionais e irracionais e suas aplicações a outras áreas da ciência.

Durante a investigação histórica em sala de aula os grupos foram orientados para que, além da pesquisa bibliográfica, elaborassem também atividades de ensino a partir dos aspectos históricos investigados, procurando fazer sua pesquisa bibliográfica em livros, revistas, periódicos, etc..., com o objetivo de subsidiar as discussões em sala de aula. Todavia, ao observarmos a dificuldade deles com relação a esse tipo de pesquisa, decidimos também oferecer materiais para subsidiar o trabalho de investigação histórica. Após uma série de orientações e reformulações da pesquisa em desenvolvimento, ao final do período letivo, cada grupo elaborou pequenas monografias envolvendo os temas de seus microprojetos, os quais foram apresentados sob forma de seminário.

A experiência mostrou que durante a formação para o ensino de matemática, os estudantes precisam desafiar-se a construir seus processos de busca, de compreensão e de conexão entre o conhecimento estabelecido nas práticas socioculturais históricas e suas diversas representações, partindo dos conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo de sua trajetória escolar.

Para Finalizar

As experiências vivenciadas são importantes para professores em formação continuada, bem como aos futuros professores de Matemática, uma vez que a análise dos resultados obtidos em experiências formativas nos levou a esboçar algumas conclusões a respeito da superação das suas dificuldades conceituais dos professores, bem como a respeito da possibilidade de uso da história como um agente de cognição matemática na sala de aula, adotando a investigação como princípio desencadeador do processo.

A partir das reflexões apresentadas anteriormente, lanço a seguir algumas questões novas a serem respondidas somente após o desenvolvimento de outros estudos que tomem os resultados e conclusões apresentados por mim como um referencial para executá-la. Porém, o mais importante de tudo isso, é que todas essas perspectivas para o futuro, buscam atender as necessidades dessa pergunta que gerou nossa investigação e que norteará o caminhar ao longo das atividades profissionais: como as informações históricas podem contribuir para a melhoria do ensino da matemática? Diante de tudo que foi exposto posso admitir que esse trabalho procura apontar uma das possíveis respostas a essa pergunta.

Entretanto, cabe a outros estudos a busca de novas respostas a essa pergunta, visto que as respostas dependem diretamente do interesse de cada um em tentar contribuir para

que os aspectos históricos do desenvolvimento da matemática não se tornem apenas documentos guardados em bibliotecas e que só servem de ilustração estática para algumas exposições ou, as vezes, para constituir-se de uma introdução superficial dos capítulos de alguns livros didáticos, ou simplesmente páginas de alguns livros de curiosidades. Isso não pode mais acontecer, pois caso contrário a memória da matemática como uma cultura científica construída pelo homem ao longo de sua organização social se perderá. Junto com ela, perderemos toda a identidade humana que faz da matemática um dos maiores feitos da humanidade para tentar compreender as relações entre os elementos do mundo.

Referências

- DOCKWEILER, C. J. **Children's Attainment of Mathematical Concepts: A Model Under Development**. Texas A&M University, 1996. (Preprint).
- KRAGH, Helge. **Introdução à historiografia da Ciência**. Tradução Carlos Grifo Babo. Porto/Portugal: Porto Editora, 2001.
- MARROW, H. I. **Do Conhecimento Histórico**. 4.ed. Tradução Ruy Belo. Lisboa: Martins Fontes, 1975.
- MENDES, I. A. História para o ensino de matemática em saberes multidimensionais. In: Wagner Valente et al. **Ciências da Educação, Campos Disciplinares e Profissionalização: Saberes em debate para a formação e professores**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020. p. 211-242.
- MENDES, I. A. (a). **Matemática e Investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- MENDES, I. A. (b) **A investigação histórica no ensino de matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.
- MENDES, I. A. **A formação de professores de matemática a partir da história da matemática**. Relatório Técnico de Projeto de Pesquisa. Natal: UFRN, 2007.
- MENDES, I. A. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula In: MENDES, I. A. et al. **A história com um agente de cognição na educação matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006.
- MIGUEL, A. **Três estudos sobre História e Educação Matemática**. Campinas, São Paulo, 1993. 274p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, SP, 1993.
- PRADO, E. L. B. **História da Matemática: um estudo de seus significados na Educação Matemática**. Rio Claro, 1990. 77p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). - Universidade do Estado de São Paulo.
- RÜSEN, Jörn. **Razão histórica**. Teoria da história: os fundamentos da ciência histórica. Tradução Estevão de Rezende Martins. Brasília: Editora da UnB, 2001.
- RÜSEN, Jörn. **Reconstrução do passado**. Teoria da história II: os princípios da pesquisa histórica. Tradução Asta-Rose Alcaide. Brasília: Editora da UnB, 2007.

SCHAFF, A. **História e verdade**. Tradução Maria Paula Duarte. Lisboa: Editorial Estampa, 1994.

Sobre o autor

Iran Abreu Mendes

Professor Titular da Universidade Federal do Pará – Instituto de Educação Matemática e Científica. Doutor em Educação.

E-mail: iamendes1@gmail.com Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-7910-1602>

Recebido em: 17/05/2022

Aceito para publicação em: 04/06/2022