Programa de Pós-Graduação em Educação
Universidade do Estado do Pará
Belém-Pará- Brasil

Revista Cocar

Revista Cocar. V.17 N.35/2022 p.1-19 ISSN: 2237-0315

Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes do ensino médio em relação aos problemas de partilha

Levels of development of algebraic thinking of high school students in relation to problems of sharing

Pedro Victor Do Nascimento Araújo
Jadilson Ramos de Almeida
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)
Recife-Brasil

Resumo
Este artigo tem por objetivo analisar o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes do ensino médio de uma escola de referência em ensino médio do Estado de Pernambuco. Utilizamos como referência um modelo que categoriza o desenvolvimento do pensamento algébrico em relação aos problemas de partilha em quatro níveis: o nível 0, caracterizado pela ausência de pensamento algébrico; o nível 1, no qual o pensamento algébrico é incipiente; o nível 2, em que o nível de pensamento algébrico é intermediário; por fim o nível 3, que revela o pensamento consolidado. Para esta análise, foi aplicado um teste a 86 (oitenta e seis) estudantes do ensino médio, composto por seis problemas de partilha que são problemas envolvendo equações polinomiais do 1º grau e que se caracterizam por ter uma quantidade conhecida que é repartida em partes desiguais e desconhecidas. Os resultados apontam que quase um terço dos participantes se encontra no nível 0, ou seja, ainda não conseguem mobilizar nenhuma característica do pensamento algébrico ao se depararem com um problema de partilha e que apenas 21% está com o pensamento algébrico consolidado, se encontrando no nível 3. Revelando, portanto, que muitos dos participantes da pesquisa estão a concluir o ensino médio e ainda encontram dificuldade em pensar algebricamente ao se depararem com um problema de partilha.
Palavras-chave: álgebra escolar; Pensamento algébrico; Problemas de partilha.

Abstract

This article aims to analyze the level of development of algebraic thinking in high school students from a reference high school in the state of Pernambuco. We used as a contribution a model that categorizes the development of algebraic thinking in relation to problems of sharing in four levels, level 0, characterized by the absence of algebraic thinking, level 1, in which algebraic thinking is incipient, level 2, where the level of algebraic thinking is intermediate, and, finally, level 3, which reveals the consolidated algebraic thinking. For this analysis, we applied a test to 86 high school students composed of six problems of sharing, which are problems involving polynomial equations of the 1st degree and which are characterized by having a known quantity that is divided into unequal and unknown parts. The results show that almost a third of the participants are at level 0, that is, they are not yet able to mobilize any characteristic of algebraic thinking when faced with a problem of partition and that only 21% are in level 3, showing consolidated algebraic thinking. This reveals that although many of the research participants are completing high school, they still find it difficult to think algebraically when faced with a problem of sharing.
Keywords: School algebra; Algebraic thinking; Problems of sharing; High school.

Introdução

A álgebra ganha, a partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) o *status* de eixo da matemática. Esse documento propõe que os professores promovam atividades que possibilitem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes desde o início da escolarização. Porém, como desenvolver essa forma de pensar? Como identificar quando o estudante está pensando algebricamente? Como saber se os discentes desenvolvem o pensamento algébrico?

Essas questões, dentre tantas outras, vêm sendo pesquisadas desde os anos de 1980, época que surgem, no Brasil, as primeiras pesquisas com foco na álgebra escolar. Desde então as pesquisas vêm indicando que o ensino da álgebra poderia está focado no desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que essa forma de pensar possibilita aos estudantes a produção de sentido para a linguagem e os objetos algébricos, o que dificilmente acontece se a ênfase for na linguagem simbólica algébrica (LINS, 1992; ARCAVI; 2005).

Pensando em uma dessas questões, Almeida (2016), em sua tese de doutorado, propõe um modelo que possibilita identificar em qual nível de pensamento algébrico os estudantes se encontram ao resolver um determinado tipo de problema de estrutura algébrica relacionados às equações polinomiais do 1º grau, os problemas de partilha (PP).

Os PP são tidos como uns dos problemas que possibilitam desenvolver o pensamento algébrico e são indicados para serem trabalhados desde o 5º ano do ensino fundamental (BRASIL, 2018). Além disso, uma pesquisa realizada e discutida em Almeida e Câmara (2014) apontou que esses problemas são os mais propostos nos livros didáticos do 7º ano do ensino fundamental nos capítulos dedicados ao ensino de equações polinomiais do 1º grau.

A partir desse cenário, surgiu o interesse, nesse artigo, em responder a seguinte questão: qual o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico em relação aos PP de estudantes que estão a concluir o ensino médio? Para responder à questão, realizamos a pesquisa com estudantes do 2º e 3º ano do ensino médio.

Caracterização de Problemas de partilha (PP)

O que são problemas de estrutura algébrica? Segundo Da Rocha Falcão (1997) são problemas em que os procedimentos aritméticos são, muitas vezes, enfadonhos ou insuficientes para resolvê-los. Booth (1995) destaca a diferença entre atividades aritméticas e algébricas. Segundo a autora, numa atividade aritmética o foco "[...] é encontrar determinadas respostas numéricas particulares" (p. 24) enquanto que nas algébricas o foco "é estabelecer procedimentos e relações e expressá-las numa forma simplificada geral" (p. 24).

Ruiz, Bosch e Gascón (2010) destacam que nos problemas aritméticos os dados são conhecidos e eles podem ser solucionados com operações usuais. Já nos problemas de estrutura algébrica nem todos os dados são conhecidos. Pode haver relações entre as quantidades e nem sempre o desconhecido é um resultado numérico. Para Gama (2003) e Marchand e Bednarz (1999), um problema de estrutura algébrica requer o estabelecimento de uma relação entre os dados do enunciado para que possa ser convertido, por exemplo, em uma equação equivalente ao problema. Para os autores, é necessário estabelecer essa relação para convertê-las em uma linguagem matemática, como a simbólica algébrica.

Marchand e Bednarz (1999) classificam os problemas de estrutura algébrica em três classes, os "*problemas de transformação*", os "*problemas de taxa*" e os "*problemas de partilha*". Nesta pesquisa, a ênfase será nos PP, que são caracterizados por ter uma quantidade total conhecida que será repartida em quantidades desiguais e desconhecidas.

Marchand e Bednarz (1999) classificam os PP em três categorias, levando em consideração o encadeamento das relações: *tipo fonte*, *tipo poço* e *tipo composição.*

Nos problemas tipo fonte as relações envolvidas são geradas a partir de uma mesma grandeza, como se pode ver no exemplo: *"Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?".* Nesse caso, Joana é a fonte das relações entre a quantidade que Paulo e Roberto irão receber. Segundo pesquisas, como por exemplo as de Oliveira e Câmara (2011), os PP com encadeamento tipo fonte são os mais fáceis de serem resolvidos, seguidos pelos tipo composição. O que os estudantes encontram mais dificuldades na resolução são os com encadeamento tipo poço.

Nos problemas tipo composição as relações são estabelecidas em sequência, como se pode ver no exemplo: *"Em uma escola, 160 estudantes praticam esportes. O número de estudantes que jogam basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de estudantes que jogam futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos estudantes praticam cada esporte?".* Neste problema a primeira relação é dada entre os estudantes que jogam basquete e vôlei e logo após a relação é entre os estudantes que jogam futebol com os que jogam basquete.

Já nos problemas tipo poço as relações convergem para um só dado da questão, como se pode ver no exemplo: *"Ana, Júlia e Maria têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e metade dos selos de Maria. Quantos selos tem cada uma?".* Neste problema a relação dos dados da quantidade de cada personagem converge para Júlia.

Pensamento Algébrico e níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico

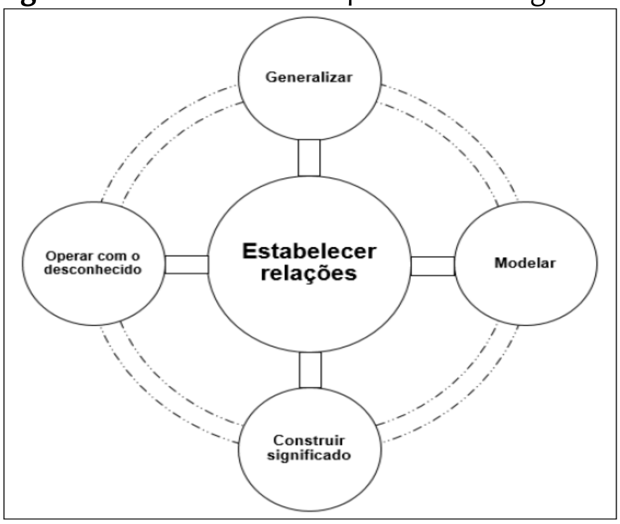
Não há uma caracterização definitiva para pensamento algébrico. Segundo Radford (2006), talvez isso ocorra pelo vasto escopo de objetos como, por exemplo, funções, equações e padrões, pelos processos algébricos, como inversões e simplificações, e pelos modos possíveis de conceber o pensamento em geral. Para esse estudo iremos adotar a caracterização do pensamento algébrico proposta por Almeida (2016) – elaborada a partir das ideias de três pesquisadores dessa área – Lins (1992), Kaput (2008) e Radford (2006).

Almeida (2016) defende que o pensamento algébrico

> [...] é composto pelos seguintes elementos, ou características: estabelecer relações; generalizar; modelar; construir significado; e operar com o desconhecido. Além disso, (…), no centro dessas características está a capacidade de estabelecer relações, e, subjacentes a ela, porém, não menos importantes, estão as outras características (p. 79).

Para entender melhor essa caracterização de pensamento algébrico, Almeida (2016) elaborou o seguinte esquema, que mostra como essas características se comunicam e inter-relacionam entre si.

Figura 1 – Características do pensamento algébrico



Fonte: Almeida (2016, p. 80)

A seguir temos, de forma resumida, a definição de cada uma dessas características.

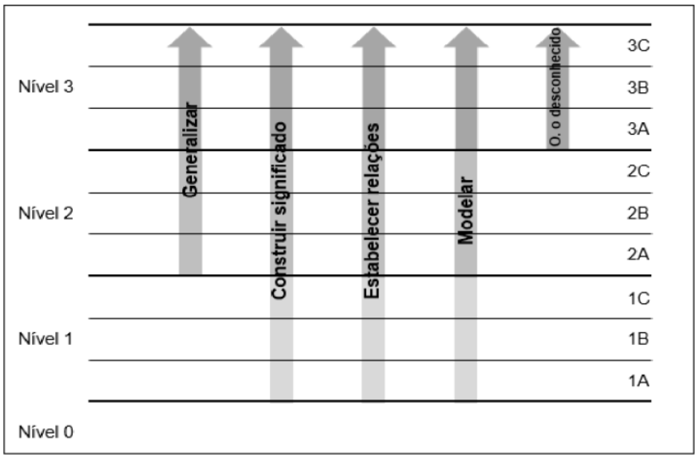
- **Estabelecer relações:** esta característica está no centro do pensamento algébrico, ou seja, é a primeira característica que o estudante desenvolve para depois desenvolver as outras. Se caracteriza pelas relações que se devem estabelecer a partir, por exemplo, das condições postas no enunciado de um problema de partilha, ou seja, estabelecer relações entre as partes e a quantidade total, percebendo o problema como uma relação entre as partes e o todo.
- **Modelar:** é a capacidade do estudante de elaborar um modelo matemático que representa, por exemplo, o problema dado em linguagem natural. No caso dos PP, não precisa, necessariamente, ser uma equação expressa na linguagem algébrica formal, composta por símbolos essencialmente alfanuméricos.
- **Generalizar:** é a capacidade que o estudante tem de perceber, por exemplo em um problema de partilha, as quantidades de cada parte que o total é repartido, de uma forma geral. Nesse caso, essa forma geral é entendida como incógnita, e pode ser representada, ou não, por uma letra, como o X.
- **Operar com o desconhecido:** é a capacidade que o estudante tem de operar com valores desconhecidos como se fossem conhecidos. Por exemplo, ao se deparar com uma equação, ele manipula o desconhecido, o "X" no caso, "segundo as leis da aritmética em relação à igualdade, em que são realizadas algumas operações na equação inicial com o objetivo de gerar equações equivalentes, até se chegar no valor de "X", no desconhecido" (ALMEIDA; CÂMARA, 2017, p. 56).
- **Construir significado:** é a capacidade do estudante de compreender o significado dos objetos e da linguagem algébrica. Por exemplo, quando ele compreende que numa equação polinomial do 1º grau existe uma relação de equivalência entre as quantidades, revela que está compreendendo o significado dos objetos algébricos em jogo (ALMEIDA; CÂMARA, 2017).

Por fim, Almeida (2016) afirma que o estudante está a pensar algebricamente se mobilizar pelo menos uma dessas características, a capacidade de estabelecer relações. Já as "[...] características subjacentes à central surgem, e se desenvolvem, de forma concomitante, e que o desenvolvimento de uma dessas características leva, consequentemente, ao desenvolvimento de outras" (p. 84).

A partir dessa caracterização de pensamento algébrico, Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018) propõem um modelo que possibilita identificar o nível de pensamento algébrico de um sujeito em relação aos PP.

O modelo proposto por esses pesquisadores vai do nível 0, caracterizado pela ausência de pensamento algébrico, passando pelo nível 1 – pensamento algébrico incipiente, pelo nível 2 – pensamento algébrico intermediário, chegando, por fim, ao pensamento algébrico consolidado, nível 3. Além disso, para cada nível, a partir do nível 1, existem três subníveis, denominados pelas letras A, B e C. Para visualizar melhor esse modelo, temos a figura 2 a seguir, que mostra a relação entre os níveis e as características do pensamento algébrico.

Figura 2 – Níveis de desenvolvimento do Pensamento Algébrico



Fonte: Almeida e Câmara (2018, p. 565)

A seguir, definimos de forma resumida o que significa cada nível e subnível do desenvolvimento do pensamento algébrico. Vale lembrar que Almeida e Câmara (2018) defendem que a estratégia utilizada pelos estudantes revela o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico em que eles se encontram, e o encadeamento das relações (tipo fonte, composição e poço) indica os subníveis.

- **Nível 0 (Ausência de Pensamento Algébrico):** os estudantes que se encontram nesse nível não conseguem mobilizar nenhuma das características do pensamento algébrico. Isso ocorre porque eles não conseguem estabelecer as relações entre as informações contidas no enunciado do problema. Os estudantes que se encontram nesse nível costumam escolher uma estratégia errada para solucionar o problema, como realizar um cálculo qualquer com os valores que estão no enunciado, dividir por 3 a quantidade total, ou deixar o problema sem resposta. Ressaltamos que

> [...] isso não significa que um aluno que se encontra nesse nível não mobiliza, em nenhum momento, alguma característica do pensamento algébrico. Ele pode mobilizar algumas dessas características dessa forma de pensar quando se depara com outras situações como, por exemplo, as de generalizações de sequências (ALMEIDA, 2016, p. 135).

- **Nível 1 (Pensamento Algébrico Incipiente):** os estudantes que se encontram nesse nível adotam como estratégia base para resolver os PP a atribuir valores (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011) e conseguem mobilizar três das cinco características do pensamento algébrico, a saber: estabelecer relações, modelar e construir significado. Nesse nível temos três subníveis. O subnível 1A, formado pelos estudantes que conseguem resolver, mobilizando a estratégia de atribuir valores, apenas os PP com encadeamento tipo fonte (mais fáceis). No subnível 1B encontram-se os que conseguem resolver, com a mesma estratégia, os PP com encadeamento tipo fonte e tipo composição (fáceis/intermediários). Por fim, o subnível 1C é composto por aqueles que conseguem resolver, adotando a estratégia de atribuir valores, os PP independentemente do tipo de encadeamento – fonte, composição ou poço (ALMEIDA, 2016; ALMEIDA; CÂMARA, 2018).
- **Nível 2 (Pensamento Algébrico Intermediário):** neste nível os estudantes adotam a estratégia algébrica com registro sincopado para resolver os PP e mobilizam quatro características do pensamento algébrico. Além das três mobilizadas pelos que se encontram no nível 1 (estabelecer relações, modelar e construir significado), os estudantes do nível 2 conseguem mobilizar a capacidade de generalizar. Além disso, a resolução apresenta um modelo matemático mais esperado para esse tipo de problema, uma equação polinomial do 1° grau, mas, a linguagem utilizada, segundo Oliveira e Câmara (2011), apresenta um registro sincopado, ou seja, formado por abreviações, letras, números, sinais de operações, dentre outros. Assim como no nível 1, nesse nível é possível categorizar três subníveis de acordo com o encadeamento dos PP, a saber: 2A, 2B e 2C. No subnível 2A estão os estudantes que conseguem resolver, com a estratégia algébrica com registro sincopado, os PP mais fáceis, ou seja, os com encadeamento tipo fonte. No 2B estão os que conseguem resolver com essa estratégia os PP tipo fonte e tipo composição, e no 2C estão os que conseguem resolver os PP, com a estratégia algébrica com registro sincopado, os PP independente do encadeamento de suas relações (ALMEIDA, 2016; ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

- **Nível 3 (Pensamento Algébrico Consolidado):** os estudantes que se encontram nesse nível mobilizam todas as características do pensamento algébrico, ou seja, eles conseguem, ao se depararem com um PP, estabelecer relações, modelar, construir significado, generalizar e operar com o desconhecido como se fosse conhecido. Para isso, os estudantes que se encontram nesse nível adotam a estratégia algébrica com registro algébrico, isto é, conseguem converter o PP em uma equação polinomial do 1º grau na linguagem algébrica formal esperada para o ambiente escolar. Da mesma forma que o nível 1 e 2, no nível 3 também é possível caracterizar três subníveis – 3A, 3B e 3C. A caracterização desses subníveis segue a mesma lógica dos subníveis anteriores, mudando apenas a estratégia, que nesse caso é a algébrica com registro algébrico (ALMEIDA, 2016; ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

Essas estratégias e detalhamento de cada característica do pensamento algébrico mobilizadas em cada nível serão melhor discutidas e exemplificadas nos nossos resultados.

Metodologia

Essa pesquisa teve por objetivo analisar o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes do ensino médio de uma escola pertencente à rede estadual de Pernambuco. Participaram da pesquisa 86 estudantes, sendo 58 do 2º ano e 28 do 3º ano.

Para produção de dados foi adotado o mesmo questionário utilizado nas pesquisas de Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018), composto por seis PP, que se caracterizam por ter um valor conhecido que, por sua vez, é repartido em partes desiguais e desconhecidas (MARCHAND; BEDNARZ 1999). Os PP constituem-se como um tipo de problema de estrutura algébrica relacionado com equações polinomiais do 1º grau.

O questionário foi impresso em uma folha com o comando "resolva os seguintes problemas" e contava com dois PP com encadeamento das relações do tipo fonte, dois com encadeamento tipo composição e dois com encadeamento tipo poço. Foi solicitado aos sujeitos que utilizassem, para resolver os problemas, apenas caneta, pois queríamos ter acesso a todos os registros realizados para chegar na resposta das questões. A aplicação teve duração de uma hora e foi realizada durante a aula de matemática com a permissão do professor das turmas envolvidas.

As análises dos questionários foram feitas com intuito de identificar em qual nível de desenvolvimento do pensamento algébrico os estudantes se encontram, sem nenhuma intenção de realizar comparações entre os sujeitos da pesquisa.

Resultados e discussão

Iniciamos nossa análise em relação ao rendimento dos estudantes nos PP, como podemos observar no quadro 1 a seguir. Neste momento não tínhamos a intenção de comparar o rendimento por ano de escolaridade.

Quadro 1 – Rendimento dos estudantes

	Frequência Absoluta	**Porcentagem**
Acertos	192	37%
Erros	166	32%
Não resposta	158	31%
Total	**516**	**100%**

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos perceber que os índices são bem próximos, variando apenas de 31% para as não resposta, a 37% para os acertos. Entretanto, a quantidade de acertos é bem menor se comparado com os erros e não resposta juntos, ou seja, 37% contra 63%. Revelando, portanto, que muitos dos participantes da pesquisa, mesmo estando no final do ensino médio, ainda encontravam dificuldades em resolver problemas relacionados à equações do 1° grau, conceito que é trabalhado no ensino fundamental.

Esse resultado é bem próximo ao encontrado na pesquisa de Oliveira e Câmara (2011), que aplicaram o mesmo teste utilizado em nossa pesquisa a estudantes do 6º ano do ensino fundamental. Esses autores verificaram que 33% dos PP foram respondidos de forma correta, ante 67% de erros e não respostas. Portanto, podemos observar que a porcentagem de erros e não respostas dos estudantes do 6° ano participantes da pesquisa de Oliveira e Câmara (2011) e os dos que estão nos anos finais do ensino médio são muito próximos, o que indica que mesmo estando prestes a concluírem o ensino médio, esse estudantes ainda continuam com dificuldades em resolver PP que, segundo a BNCC (BRASIL, 2018), podem ser estudados desde o 5º ano do ensino fundamental.

O próximo quadro expõe o rendimento dos estudantes por encadeamento das relações dos problemas de partilha. Segundo Marchand e Bednarz (1999), o encadeamento das relações podem modificar as estratégias e a performance dos estudantes.

Quadro 2 – Rendimento por encadeamento das relações dos PP

	ACERTOS	ERROS	NÃO RESPOSTA	Total
PP tipo fonte	87	50	35	172
	51%	29%	20%	100%
PP tipo composição	71	51	50	172
	41%	30%	29%	100%
PP tipo poço	34	65	73	172
	19%	38%	43%	100%
TOTAL	**192**	**166**	**158**	

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar que os acertos vão diminuindo conforme o encadeamento dos PP muda. Os PP do tipo fonte tiveram 51% de acerto, enquanto os PP tipo composição o índice de acerto de 41%. Já os com encadeamento tipo poço obtiveram apenas 19% de acerto.

Esses resultados são corroborados com os resultados de Oliveira e Câmara (2011), que verificaram que o índice de acerto dos estudantes dos 6º anos foi de 44% para os PP com encadeamento tipo fonte, de 41% para os com encadeamento tipo composição e de 23% para os com encadeamento das relações tipo poço.

Dois fatos nos chamam a atenção, o primeiro é que os estudantes do 6° ano participantes da pesquisa de Oliveira e Câmara (2011) obtiveram um melhor rendimento nos problemas com encadeamento tipo poço, 23% contra 19% dos do ensino médio, e o segundo é que nesse tipo de problema aparecem mais questões em branco em relação aos outros tipos de problemas, 43% nos estudantes do ensino médio e 38% nos do 6° ano, reforçando a dificuldade dos estudantes com esse tipo de problema, indo ao encontro da pesquisa de Marchand e Bednarz (1999).

Assim como a análise do rendimento, a classificação dos estudantes em relação ao nível de desenvolvimento do pensamento algébrico também foi realizada com as turmas do 2º e 3º ano juntas, pois o objetivo era analisar, a partir das estratégias adotadas para a resolução do problema de partilha, em que nível do pensamento algébrico eles se encontram no momento que foi aplicado o teste.

No quadro 3 a seguir temos a distribuição dos participantes da pesquisa por nível.

Quadro 3 – Distribuição nos níveis

Níveis	Frequência	Porcentagem
0	26	31%
1	38	44%
2	2	2%
3	20	23%
Total	**86**	**100%**

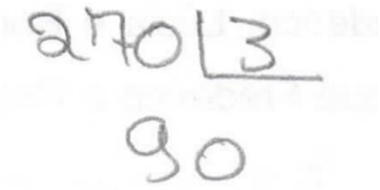
Fonte: Dados da pesquisa

Um dado que nos chama atenção é a quantidade de participantes que se encontram no nível 0, 31%. Isso significa que quase um terço dos sujeitos da pesquisa não conseguiram mobilizar nenhuma característica do pensamento algébrico. Desses estudantes, 9 entregaram os questionários em branco. Isto mostra que eles, mesmo nos anos finais do ensino médio, ainda sentem dificuldades em resolver problemas de estrutura algébrica envolvendo equação do 1º grau.

Os estudantes que se encontram no nível 0 não mobilizam, ao se depararem com um PP, nenhuma das características do pensamento algébrico. Como não conseguem entender as condições postas no enunciado do problema de partilha, acabam adotando as estratégias "cálculo qualquer", na qual realizam um cálculo com os valores que aparecem no enunciado do problema, como uma soma por exemplo (ALMEIDA; CÂMARA, 2018). Vale lembrar que isso não significa que esses estudantes não mobilizem o pensamento algébrico em nenhum momento. Eles podem mobilizar essa forma de pensar ao se depararem com problemas de estrutura algébrica que demandem estabelecer outras formas de relações, como os problemas de generalização de padrões, por exemplo (ALMEIDA, 2016).

Outra estratégia mobilizada por estudantes que se encontram nesse nível é a de "dividir por 3". Nela, eles dividem a quantidade total do problema de partilha pelas três personagens, como se a divisão fosse em partes iguais (ALMEIDA; CÂMARA, 2018). A seguir temos um exemplo do uso dessa estratégia mobilizada por um dos participantes para tentar resolver o seguinte problema: *"Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros tem cada um?"*

Figura 3. Estratégia dividir por 3



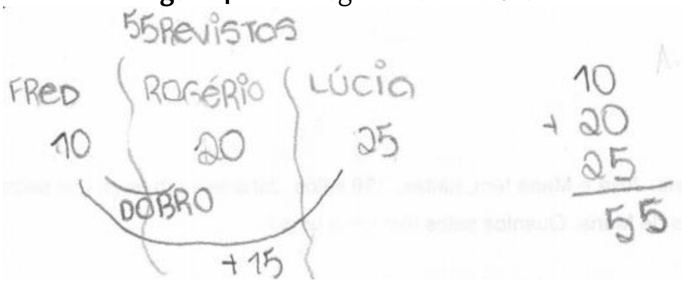
Fonte: dados da pesquisa

É possível notar que ao tentar resolver o PP supracitado o estudante não conseguiu estabelecer as relações, ou seja, não levou em consideração as condições postas nos dados do enunciado. E, estabelecer relações é a característica central do pensamento algébrico (ALMEIDA; CÂMARA, 2017).

Podemos observar que a maioria dos participantes, 44%, se encontra no nível 1, ou seja, consegue mobilizar três das cinco características do pensamento algébrico: estabelecer relações, modelar e construir significado (ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

Mostrando, nesse caso, que quase metade dos sujeitos da pesquisa, que estão prestes a concluir a educação básica, não tem o pensamento algébrico consolidado em relação aos PP. Temos, na figura 4 a seguir um exemplo da estratégia atribuir valores mobilizada por um dos partícipes na resolução do problema: *"Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos tem cada um?"*

Figura 4 – Estratégia atribuir valores



Fonte: dados da pesquisa

Na estratégia atribuir valores "[...] o aluno atribui determinado valor a uma das incógnitas, aplicando então as relações para determinar o valor das outras incógnitas" (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011, p. 6). Podemos inferir, a princípio, que essa estratégia é essencialmente aritmética, pois se vale exclusivamente de números e operações para se chegar ao resultado.

Entretanto, de acordo com Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018), os estudantes que adotam essa estratégia mobilizam, além da característica central do pensar algebricamente – capacidade de estabelecer relações – outras duas características, a capacidade de modelar e a de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos.

A capacidade de *estabelecer relações* é revelada quando o estudante, na resposta da figura 4, indica em seus registros que entendeu que o total de revistas em quadrinhos é dividido pelas três personagens (Frederico, Rogério e Lúcia), por isso ele coloca os 55 acima dos três nomes. Porém, além disso, ele também percebe que essa divisão não deve ser feita em partes iguais, como feito pelo estudante que adota a estratégia dividir por 3 (exemplo da figura 3). Por conta disso, ele coloca, em seu modelo, o traço indo de Frederico ao

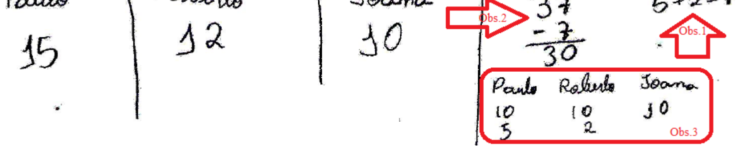
Rogério ($\frac{\cdot}{dobro}$), indicando que Rogério tem o dobro de revistas de Frederico. O mesmo acontece com o traço que vai de Frederico à Lúcia ($\frac{\cdot}{+\,15}$), que significa que Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico.

Nesse mesmo momento, em que ele revela mobilizar a capacidade de estabelecer relações, ele também já está revelando a capacidade de *modelar*, pois o modelo elaborado já mostra a utilização de uma linguagem sincopada, concisa, que representa as relações do problema. O estudante se vale de símbolos – mesmo que não sejam essencialmente algébricos – como os nomes das personagens e os traços para indicar as condições postas no enunciado.

Mesmo não parecendo com a equação esperada quando se converte esse problema para a linguagem algébrico (X + 2X + X +15 = 55), seus registros indicam que ele compreendeu o problema como uma relação de igualdade entre o todo (55 revistas) e a soma das quantidades de revistas de cada personagem, indicando a mobilização da capacidade de *construir significado* para o objeto algébrico em questão, a equação polinomial do 1º grau (ALMEIDA, 2016; ALMEIDA; CÂMARA, 2018). Mostrando, portanto, que, assim como apontam alguns pesquisadores como Lins (1992), Kaput (2008), Radford (2009) e Almeida (2016), o estudante não precisa utilizar a linguagem algébrica para pensar algebricamente.

Os estudantes que estão no nível 2 apresentam, em suas resoluções, uma linguagem algébrica sincopada. Essa linguagem não é expressa propriamente pelo uso da simbologia algébrica, mas, sim, pela presença de letras, abreviações, números, sinais de operações, etc. (ALMEIDA, 2016). A seguir temos um exemplo desse tipo de resolução para o seguinte problema: *"Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?"*

Figura 5 – estratégia algébrica com registro sincopado



Fonte: Dados da pesquisa

É possível perceber que ao que tudo indica o estudante inicia a resolução realizando a operação "5 + 2 = 7" (obs. 1) e em seguida ele realiza a operação "37 – 7 = 30". Podemos pensar, a princípio, que essas operações são realizadas de forma aleatória. Porém, acreditamos que, assim como apontam as pesquisas de Oliveira e Câmara (2011), Almeida (2016), Almeida e Câmara (2018), ele fez essas operações por equacionar o problema mentalmente, ou seja, ele conseguiu pensar na equação "J + (J + 5) + (J + 2) = 37", em que "J" representa a quantidade de Joana, "J + 5" representa a quantidade que Paulo irá e "J + 2" representa a quantidade que Roberto. Se ele representasse a equação na linguagem formal ele resolveria da seguinte forma:

J + J + 5 + J + 2 = 37

1. $3J + 7 = 37$ (Equivale ao estudantes somar 5 + 2)
2. $3J = 37 - 7$(Equivale ao estudante armar a conta 37 – 7)
3. $3J = 30$ (Equivale ao estudante subtrair 37 – 7)
4. $J = \frac{30}{3}$
5. $J = 10$ (Equivale ao momento em que o estudante divide os 30 em partes iguais para as personagens)

Após realizar esses passos, na obs.3, o estudante acrescenta abaixo da quantidade de Paulo o número 5, representando a condição posta no enunciado que é "Paulo receba 5 mais que Joana", e abaixo da quantidade de Roberto ele acrescenta 2, pois "Roberto recebe 2 a mais que Joana".

Os estudantes que se encontram no nível 2 conseguem mobilizar 4 das cinco características do pensamento algébrico propostas por Almeida e Câmara (2017): estabelecer relações, modelar, generalizar e construir significado para a linguagem e o objeto algébrico.

A capacidade de *estabelecer relações* entre os dados do enunciado é revelada no momento em que o estudante, no exemplo da figura 5, percebe a relação entre o total de balas e as quantidades que cada personagem irá receber, além de levar em consideração as condições propostas no enunciado, isto é, que a divisão do todo entre as personagens não é em partes iguais (ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

A capacidade de *modelar* o problema pode ser observado quando ele elabora um modelo matemático que representa as relações, condições postas no enunciado do problema, mesmo que esse modelo não seja a equação esperada. Na figura 5 é possível perceber que ele compreendeu que existem certas condições no enunciado que indica o caminho para se chegar nas quantidades de balas de cada personagem.

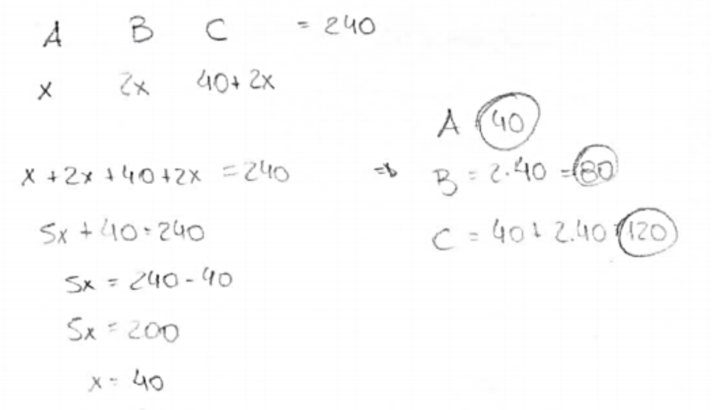
Já a capacidade de *generalizar* é revelada quando o estudante adota a quantidade de balas de Joana como a incógnita fonte da equação, diferentemente do que se encontra no nível 1 – que parte de um valor particular, por isso a estratégia "atribuir valores". Nesse nível, a indeterminação, a incógnita, já aparece de forma explícita ao discurso (RADFORD, 2009), mesmo não aparecendo nos registros do estudante.

Por fim, é possível verificar que o estudante também consegue compreender o problema como uma relação de igualdade entre a quantidade total de balas e as quantidades de balas que cada personagem irá receber, mostrando que ele conseguiu mobilizar a quarta característica do pensar algebricamente, a capacidade de *construir significado* para o objeto algébrico em jogo, no caso, a equação polinomial do 1º grau.

Quanto à quantidade de participantes da pesquisa no nível 3 – pensamento algébrico consolidado – foi verificado que menos de um quarto (23%) se encontra nesse nível. Dados que nos geram preocupações, pois revelam que boa parte desses sujeitos, que estão prestes a concluir o ensino médio, ainda não consegue mobilizar todas as características do pensamento algébrico quando se depara com um problema de partilha.

No exemplo a seguir, figura 6, temos a resolução de um estudante que se encontra com o pensamento algébrico consolidado para o seguinte problema: "*Três times de basquete participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B fez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?*"

Figura 6 – estratégia algébrica com registro simbólico algébrico



Fonte: Dados da pesquisa

Nesse exemplo de resposta, em que o estudante adota a estratégia algébrica com registro algébrico, ele consegue mobilizar todas as características do pensamento algébrico (ALMEIDA; CÂMARA, 2018).

Ele identificou as relações existentes no enunciado do problema de partilha, revelando a capacidade de *estabelecer relações*, além de utilizar uma linguagem simbólica algébrica para representar o problema, ou seja, uma equação polinomial do 1º grau, revelando, portanto, que mobilizou a capacidade de *modelar* (ALMEIDA, 2016; ALMEIDA; CÂMARA, 2018). Além disso, ele se vale do modelo matemático esperado em um ambiente escolar para representar um problema desse tipo, o que não se verifica nas respostas dos estudantes que se encontram nos níveis anteriores.

Também é possível verificar que na resposta da figura 6 a indeterminação, a incógnita, é um objeto explícito ao discurso, revelada na representação do geral no registro do estudante, caracterizando, assim, a mobilização da terceira característica do pensar algebricamente, a capacidade de *generalizar*, porém, de uma forma mais desenvolvida do que nas respostas dos que se encontram no nível 2. Além disso, verificamos, nas respostas dos estudantes que se encontram no nível 3, a mobilização da única característica do pensamento algébrico que não é mobilizada em nenhum dos níveis anteriores, a capacidade de *operar com o desconhecido*, uma vez que o desconhecido é tratado como se fosse conhecido. Isso porque é possível observar que, na resolução da equação, o estudante "manipulou o desconhecido como se fossem números conhecidos, segundo as leis da aritmética em relação a uma igualdade. Nesse processo, o estudante realizou algumas operações na equação inicial com o objetivo de gerar equações equivalentes, até chegar ao valor de X" (ALMEIDA; CÂMARA, 2018, p. 181).

Por fim, percebemos que o estudante que adota a estratégia algébrica com registro simbólico algébrico, como o exemplo da figura 6, mobiliza a última característica do pensamento algébrico, a capacidade de *construir significado* para a linguagem e o objeto algébrico. Isso porque ele compreende o PP como uma relação de igualdade entre quantidades, ou seja, como uma equação polinomial do 1º grau. Além disso, ele também mostra ter construído significado para a linguagem simbólica algébrica (ALMEIDA, 2016), ao indicar que o "X" representa a quantidade de pontos do time A, "2X" a quantidade de pontos do time B, já que ele fez o dobro de pontos do time A. E "40 + 2X" equivale a quantidade de pontos do time C, já que esse fez 40 pontos a mais que o time B.

Para finalizar nossas análises, trazemos o quadro 2 a seguir, que indica em qual subnível do pensamento algébrico estão os participantes da pesquisa, uma vez que na proposição do modelo, Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018) propõem três subníveis para cada nível a partir do nível 1.

Quadro 4 – Distribuição nos subníveis

Subníveis	Frequência	Porcentagem
Nível 0	26	31%
1A	8	9%
1B	16	19%
1C	14	16%
2A	2	2%
2B	0	0%
2C	0	0%
3A	5	6%
3B	7	8%
3C	8	9%
Total	**86**	**100%**

Fonte: Dados da pesquisa

Os dados mostram que a maioria dos estudantes estão no subnível 1B, ou seja, eles conseguem resolver problemas do encadeamento fonte e composição que são os fáceis e intermediários, respectivamente. Dos estudantes que possuem o pensamento algébrico consolidado, ou seja, que estão no nível 3, apenas 7 conseguem resolver qualquer problema de partilha independente do encadeamento. Na análise dos questionários não foram encontrados estudantes que se encontravam nos subníveis 2B e 2C, indicando, portanto, que os dois sujeitos que adotaram a estratégia algébrica com registro sincopado só conseguiram resolver os PP tipo fonte, que são considerados os mais fáceis (MARCHAND; BEDNARZ, 1999; OLIVEIRA; CÂMARA, 2011).

Considerações finais

Podemos observar nos resultados que os partícipes da pesquisa, prestes a concluírem o ensino médio, ainda possuem dificuldades em resolver problemas que envolvem equações polinomiais do 1º grau, os PP. Isso talvez ocorra pelo fato de o ensino de álgebra ter como foco a linguagem algébrica, em que prevalece a manipulação e o transformismo algébrico (ALMEIDA, 2016), mesmo as pesquisas (LINS, 1992; KAPUT, 2008; RADFORD, 2009), assim como as orientações curriculares atuais como a BNCC (BRASIL, 2018) apontarem que o foco deveria ser o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Um dos dados mais preocupante é que quase um terço (31%) dos sujeitos se encontra no nível 0, revelando que tem mais estudantes que não conseguem mobilizar nenhuma das características do pensamento algébrico ao se depararem com um problema de partilha do que estudantes com pensamento algébrico consolidado (23%), que se encontra no nível 3 e conseguem, portanto, mobilizar as cinco características do pensar algebricamente propostas por Almeida e Câmara (2017).

Esses resultados nos levam a refletir sobre o ensino de álgebra nas escolas. Como promover atividades que levem os estudantes a desenvolverem o pensamento algébrico desde o primeiro contato com a álgebra para que eles não avancem até os anos finais do ensino médio com dificuldades em resolver problemas algébricos? Pesquisam indicam que para levar o sujeito a desenvolver essa forma particular de pensar, o mais importante é o trabalho com a resolução de problemas, em detrimento ao transformismo algébrico (ARCAVI, 2005; PONTE; VELEZ, 2011; BORRALHO; BARBOSA, 2011; SILVA; SAVIOLI, 2012; ALMEIDA; 2016).

Referências

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico:** Um modelo para os problemas de partilha de quantidade. Tese de Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática. UFRPE, Recife, 2016.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Análise dos problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau nos livros didáticos de matemática. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, vol. 64, 2014.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Pensamento Algébrico: Em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, vol. 6, n. 10, 2017.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: proposição de um modelo para os problemas de partilha. **Zetetiké,** Campinas, São Paulo, vol. 26, n.3, 2018.

ARCAVI, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In: **Conferência plenária no encontro de investigação em educação matemática.** Caminha, Portugal, 2005.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Anais da XIII Conferência Iteramericana de Educação Matemática.** Recife: SBEM. 2011.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação, Brasília, 2018.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: SCHLIEMANN, A. D. Et al. **Estudos em psicologia da educação matemática.** Recife: Editora Universitária da UFPE, 1997.

GAMA, C. PAL Tool: uma ferramenta cognitiva para organização e representação de problemas algébricos. In: **XIV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação** – NCE – IM/UFRJ, Rio de Janeiro. 2003.

KAPUT, J. BLANTON, M. L.; MORENO, Algebra from a symbolization point of view. In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is.** 1992. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK, 1992.

MARCHAND, P.; BEDNARZ, N. L'enseignement de l'algèbreausecondaire: une analyse des problèmes présentés auxélèves. In**: Bulletin AMQ**, Vol. XXXIX, N°4. Québec: AMQ, 1999.

OLIVEIRA, I.; CÂMARA, M. Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. Recife, 2011. In: **Anais do XIII CIAEM**.

PONTE, J. P.; VELEZ, I. Representações em tarefas algébricas no 2º ano de escolaridade. **Boletim GEPEM**. 59, 53 – 68, 2011.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: **North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME**. Bergen University College. v. 1, 2006.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. **Anais do Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Lyon, França, 2009.

RUIZ, N.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. La algebrización de los programas de cálculo aritmético y laintroduccióndel álgebra en secundaria. In: MORENO, M.M.; ESTRADA, A.; CARRILLO, J.; SIERRA, T.A. (Eds.), **Investigaciónen Educación Matemática.** XIV (pp. 545-556). Lleida: SEIEM. 2010.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I. **Revista Eletrônica de Educação**. vol. 6, n. 1, 2012.

Sobre os autores

Pedro Victor Do Nascimento Araújo
Licenciado em matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco. Professor da Educação Básica. E-mail: nascimentoaraujomat@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-5579-853X

Jadilson Ramos de Almeida
Licenciado em Matemática, Mestre em Educação Matemática e Tecnológica pela UFPE e Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela UFRPE. Líder do grupo de pesquisa Al Jabr em História, Epistemologia e Didática da Álgebra. Professor da UFRPE, atuando na Graduação em Licenciatura em Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências. Colaborador no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE.E-mail: jadilson.almeida@ufrpe.br ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-3707-4807
Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/5828404099372063

Recebido em: 27/05/2022
Aceito para publicação em: 04/10/2022