Programa de Pós-Graduação em Educação
Universidade do Estado do Pará
Belém-Pará- Brasil

Revista Cocar

Revista Cocar. V.17 N.35/2022 p.1-19 ISSN: 2237-0315

Conhecimentos de funções afim e quadrática manifestados por estudantes de licenciatura em matemática[1]

Knowledge of affine and quadratic functions manifested by mathematics undergraduate students[1]

Leonardo Ferreira Zanatta
Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Paraná (Unespar)
Campo Mourão-Brasil

Resumo
A pesquisa aqui apresentada visou analisar conhecimentos de estudantes do 4º ano do Curso de Matemática acerca do conceito de função. Para o seu desenvolvimento, foram elaboradas duas tarefas matemáticas, articulando funções afim e quadrática, implementadas de maneira remota e síncrona para 13 estudantes. As análises foram realizadas com base na Teoria dos Campos Conceituais para compreender as resoluções e conhecimentos manifestados pelos estudantes. A análise dos dados mostra equívocos dos estudantes ao realizarem a descrição dos gráficos em linguagem natural; erros associados a operações algébricas; e dificuldade para apresentar as funções correspondentes aos gráficos, especialmente de funções quadráticas. Dificuldades como essas mostram que o conceito de função ainda não está bem estabelecido por alguns desses futuros professores de matemática.
Palavras-chave: Educação Matemática. Teoria dos Campos Conceituais. Ensino Superior.

Abstract:
The research presented here aimed to analyze the knowledge of students in the 4th year of the Mathematics Course about the concept of function. For its development, two mathematical tasks were developed, articulating affine and quadratic functions, which were implemented remotely and synchronously for 13 students. The analyzes were carried out based on the Theory of Conceptual Fields, in order to understand the resolutions and knowledge expressed by the students. Data analysis shows students mistakes when describing the graphs in natural language; errors associated with algebraic operations; and difficulty in presenting the functions corresponding to graphs, especially of quadratic functions. Difficulties such as these show that the concept of function is not yet well established by some of these future mathematics teachers.
Keywords: Mathematics Education. Conceptual Fields Theory. Higher Education.

Introdução

O conceito de função, bem como as ideias de variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização, que são base para a compreensão desse conceito, estão presentes em situações que podem ser apresentadas aos estudantes desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (CALADO, 2020; MIRANDA, 2019). Tais situações podem envolver resolução de problemas e variações proporcionais diretas entre duas grandezas (BRASIL, 2018).

O conceito de função deve ser oficialmente estudado no 9° ano do Ensino Fundamental e aprofundado no Ensino Médio, ao explorar situações que "[...] oportunizem a representação, em um sistema de coordenadas cartesianas, da variação de grandezas, além da análise e caracterização do comportamento dessa variação (diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional)" (BRASIL, 2018, p. 530).

Historicamente, o ensino de funções vem privilegiando a exploração do âmbito algébrico das funções, buscando apresentar uma generalidade, introduzindo técnicas ou algoritmos (CAMPITELI; CAMPITELI, 2006). Relativamente ao conceito de função afim, por exemplo, Miranda (2019) mostra que livros didáticos de Matemática de Ensino Fundamental e Médio pouco diferenciam a estrutura das situações apresentadas nas obras. No entanto, para a compreensão de um conceito, Vergnaud (2009a; 1993) defende a necessidade de diversificar as situações para que, no decorrer do processo escolar, o conceito possa ser compreendido pelo sujeito a partir de diferentes situações vivenciadas por ele.

Para esta pesquisa, pautamo-nos na Teoria dos Campos Conceituais - TCC, na qual Vergnaud (1996; 2009b) assume que um conceito é compreendido pelo estudante não de forma isolada, mas a partir de uma diversidade de situações que englobam diversos outros conceitos, teoremas, propriedades, símbolos, representações, invariantes operatórios, etc., interligados ao que o pesquisador denomina Campo Conceitual. Além disso, segundo Vergnaud (2009a), um conceito é compreendido pelo sujeito quando mobiliza simultaneamente as formas operatória e predicativa do conhecimento, que são associadas, respectivamente, ao saber fazer e ao saber explicitar os objetos e suas propriedades.

O interesse em analisar conhecimentos de estudantes acerca de funções afim e quadrática parte dos estudos realizados pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática – GEPeDiMa[2], do qual os autores desta pesquisa fazem parte. O Grupo possui como um de seus objetivos "[...] mapear o processo de construção do conceito de função procurando identificar conhecimentos mobilizados por sujeitos de diferentes idades quando resolvem situações-problema" (NOGUEIRA; REZENDE, 2019, p. 196) referentes a esse conceito. A presente investigação é resultado de uma pesquisa de iniciação científica que culminou com o trabalho de conclusão de curso realizado pelo primeiro autor, sob orientação da segunda autora, e vem agregar seus achados às pesquisas e resultados alcançados pelo GEPeDiMa.

Mediante o exposto, estabelecemos como objetivo geral desta pesquisa: *analisar conhecimentos manifestados por estudantes de licenciatura em matemática ao resolver tarefas que envolvam funções afim e quadrática*. Neste sentido, buscamos analisar os conhecimentos matemáticos explícitos e implícitos, adequados ou não, tais como estratégias de resolução e representações simbólicas, e as formas operatória e predicativa do conhecimento, manifestadas pelos sujeitos da pesquisa durante a resolução das tarefas.

Nas próximas seções, apresentamos o referencial teórico que sustenta o desenvolvimento desta investigação, seguido dos procedimentos metodológicos, análise dos dados produzidos e considerações finais.

Alguns aspectos da Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) foi elaborada na década de 1980 pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud. Trata-se de uma teoria cognitivista que traz consigo contribuições para a Didática da Matemática, a partir de influências de Jean Piaget (1986-1980) e Lev Vygotsky (1896-1934).

A TCC tem como objetivo compreender "[...] os problemas de desenvolvimento específicos no interior de um mesmo campo de conhecimento" (VERGNAUD, 1996, p. 11), e ainda de estabelecer uma estrutura que torne possível a compreensão das filiações e das rupturas de ideias prévias entre os conhecimentos (VERGNAUD, 1993).

Segundo Vergnaud (1993), um sujeito, ao adquirir novas competências e ao compreender um novo conceito, o faz de forma progressiva, por meio de experiências que ocorrem ao longo de vários anos durante sua escolarização, sendo essas experiências relacionadas ou até mesmo derivadas de situações práticas e teóricas. Vergnaud (2009b, p. 15) afirma que os conhecimentos que uma criança adquire devem ser construídos "[...] em relação direta com as operações que ela, criança, é capaz de fazer sobre a realidade, com as relações que é capaz de discernir, de compor e de transformar com os conceitos que ela progressivamente constrói".

Essas situações e experiências nos remetem ao que Vergnaud denomina por Campo Conceitual: "[...] um conjunto vasto, porém organizado, a partir de um conjunto de situações" (VERGNAUD, 2003, p. 30). Para o pesquisador, um conceito é compreendido pelo estudante por meio das diversas situações vivenciadas ao longo do tempo, e que demandam outros elementos interligados, como teoremas, propriedades, símbolos, representações, dentre outros que, juntos, compõem o que Vergnaud denomina Campo Conceitual (VERGNAUD, 2009b; CALADO, 2020).

Considerando os elementos desta teoria, para que seja possível a interpretação de tais situações, é necessário um conjunto de esquemas e representações simbólicas (VERGNAUD, 2003). Esquemas são descritos pelo autor como "[...] uma forma de organização da atividade, destinada a uma classe de situações" (VERGNAUD, 2019, p. 7) que inclui um ou mais objetivos, regras de ação, invariantes operatórios e possibilidades de inferência.

Os invariantes operatórios podem ser de dois tipos lógicos: teoremas-em-ação e conceitos-em-ação. Vergnaud esclarece que os conceitos-em-ação são sempre verdadeiros, cabendo apenas classificá-los quanto a sua pertinência para a situação apresentada. Portanto, são diferentes dos teoremas-em-ação, que podem ser classificados como verdadeiros ou falsos, por serem proposições que interferem no desenvolvimento da tarefa. Desta forma, um teorema-em-ação, mesmo sendo falso, continua sendo um teorema-em-ação (VERGNAUD, 1993; 2019).

Como forma de exemplificar os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação, Vergnaud (1993) apresenta o seguinte exemplo: se multiplicarmos uma quantidade de objetos vendidos por 2, 3, 4, 10 ou 100, o preço pago será 2, 3, 4, 10 ou 100 vezes maior, e esse conhecimento pode ser expresso pelo teorema-em-ação verdadeiro $f(nx) = nf(x)$ para todo n inteiro; neste caso, o conceito-em-ação empregado é a distributividade.

Vergnaud (1993) apresenta uma definição para o termo *conceito* a partir de uma visão baseada na psicologia. Neste contexto, um conceito é determinado pela terna (S, I, L): S, denominado referência, é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito, as quais exigem o domínio de uma variedade de conceitos, esquemas e representações simbólicas inter-relacionadas; I, denominado significado, refere-se ao conjunto de conceitos que contribuem com o domínio das situações, são os invariantes operatórios manifestados nos esquemas, na organização, desenvolvimento e resolução das situações pelos sujeitos; e L, o significante, representa as formas linguísticas e simbólicas que permitem expressar objetos de pensamento e conceitos explícitos ou não das situações (VERGNAUD, 2009a).

Especificamente no que se refere ao conjunto dos significantes para o conceito de função, notam-se vários símbolos e representações entrelaçados a esse conceito tais como, representações gráficas em plano cartesiano, representações algébricas, representações numéricas, representações em linguagem natural e representação tabular, além de outras representações simbólicas necessárias para a construção e interpretação de gráficos, resoluções algébricas e resoluções numéricas.

Nesse sentido, com base na teoria dos Campos Conceituais, defendemos que um sujeito compreende um conceito ao saber lidar e resolver um conjunto de situações, ou seja, ao manifestar esquemas organizados para a sua resolução. Tais situações demandam propriedades, teoremas e invariantes para sua resolução, assim como diferentes representações simbólicas.

Para o autor da TCC, a definição de situação tem sentido próximo ao de tarefa, de modo que "[...] toda situação complexa seja analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldades específicas devem ser bem conhecidas" (VERGNAUD, 2003, p. 9). Vergnaud (1993) apresenta duas ideias que estão relacionadas às situações: a primeira remete à variedade, em que um conceito pode estar relacionado a diversas situações, ou seja, um Campo Conceitual abarca uma grande classe de situações; a segunda remete à história, interpretada como experiências dos estudantes, de maneira que a formação do estudante ocorre por uma sequência de situações vivenciadas por ele (VERGNAUD, 1993).

Segundo Vergnaud, é fundamental propor situações diversas que variam não apenas o contexto e os dados numéricos, mas que alternam em seus problemas a própria estrutura da questão, pois a vida cotidiana da maioria dos alunos não abarca uma grande variedade de problemas (REZENDE; BORGES, 2017).

Consoante a esta diversidade de situações, Vergnaud (2003) enfatiza a importância de propor situações que, ao serem desenvolvidas pelos estudantes, permitam aferir tanto sua competência ao fazer, representada pela forma operatória do conhecimento, quanto o saber explicar, representado pela forma predicativa do conhecimento. Desta maneira, Vergnaud (2008b, p. 01) pontua que "[...] as aprendizagens acadêmicas e profissionais concernem, ambas, ao conhecimento, sua forma operatória e sua forma predicativa", e à "[...] passagem de uma forma operatória do conhecimento a uma forma predicativa [...] é um dos maiores desafios da escola" (VERGNAUD, 2008a, p. 17-18).

Embora a forma operatória permita agir sobre uma situação, de forma mais rica e refinada que a forma predicativa, é a forma predicativa do conhecimento que nos permite enunciar aquilo que foi realizado e representá-las sob uma forma simbólica (VERGNAUD, 2002; 2011). Assim, a forma predicativa do conhecimento é fundamental na construção de um conceito, de modo que a "[...] invariância da forma simbólica vem socorrer a invariância dos conceitos" (VERGNAUD, 2002, p. 15), e "[...] o símbolo permite principalmente falar dos objetos e das propriedades não acessíveis à percepção direta" (VERGNAUD, 2002, p. 15).

Na próxima seção, descrevemos os procedimentos metodológicos, apresentando a articulação entre a Teoria dos Campos Conceituais e o objetivo proposto na pesquisa.

Procedimentos metodológicos

Esta pesquisa visou analisar conhecimentos manifestados por estudantes de licenciatura em matemática, ao resolverem tarefas que envolvam funções afim e quadrática. Os sujeitos colaboradores da pesquisa foram 13 estudantes do 4º ano de um curso de licenciatura em matemática de uma instituição pública do Estado do Paraná. A escolha desse nível de ensino ocorreu pelo fato de pesquisas (NUNES; SANTANA, 2017; PIRES; MERLINE; MAGINA, 2015) mostrarem que estudantes do Ensino Superior, e até mesmo professores, manifestam incompreensões a respeito das funções. A escolha da Universidade aconteceu pela proximidade e vínculo dos pesquisadores à instituição.

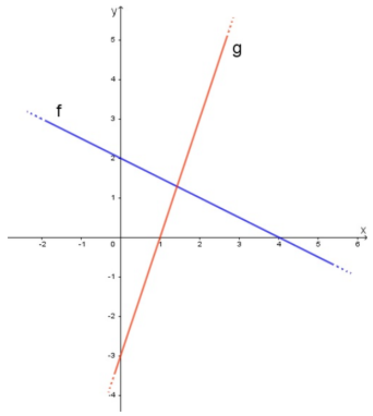
Para a coleta de informações e produção dos dados da pesquisa, convidamos os estudantes mencionados para realizar um encontro remoto via plataforma *Google Meet*. Solicitamos que eles resolvessem individualmente e de maneira síncrona as tarefas propostas dentro de um período de 3 horas-aula. Ao concluírem o desenvolvimento das tarefas, as resoluções foram fotografadas e enviadas aos proponentes da pesquisa por aplicativos de troca de mensagens ou via e-mail.

O instrumento de pesquisa é composto por duas tarefas, elaboradas tomando como ponto de partida as ideias apresentadas na tese de Llanos (2012), defendida na *Universidad Nacional de Centro de la Provincia de Buenos Aires*. Para a presente pesquisa, adaptamos e ampliamos uma das tarefas propostas por Llanos (2012), de modo que, diante das diferentes representações acerca das funções afim e quadrática, tanto a forma predicativa do conhecimento quanto a forma operatória do conhecimento pudessem ser manifestadas pelos estudantes durante suas resoluções. Dentre as diversas tarefas desenvolvidas por Llanos (2012), optamos por adaptar a *Situación 1* desenvolvida pela pesquisadora, em que era solicitado dos estudantes que, baseados em gráficos de funções afim e de funções quadráticas, fossem identificados intervalos positivos e negativos das funções, as raízes, eixos de simetria, vértices, dentre outros aspectos.

A tarefa já adaptada foi apresentada aos integrantes do GEPeDiMa, e após discussões, foi proposto que a tarefa fosse reelaborada, considerando as condições de aplicação encontradas nesta pesquisa. Especialmente foi considerado o tempo demandado para a resolução das tarefas propostas por Lhanos (2012), frente ao tempo que teríamos de disponibilidade dos estudantes colaboradores desta pesquisa. As tarefas propostas são apresentadas na Figura 1.

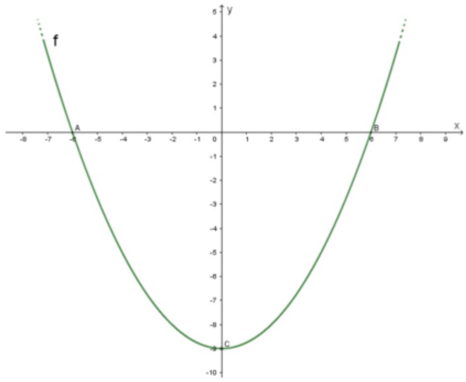
Figura 1 – Tarefas 1 e 2

1) Considere o gráfico a seguir:



a) Descreva com suas palavras a representação gráfica formada pelas funções f e g.
b) Identifique as expressões algébricas das funções f e g.
c) Multiplique as funções f e g e obtenha a função z.
d) Construa o gráfico da função z.
e) Descreva com suas palavras o gráfico da função z.

2) Considere o gráfico a seguir:



a) Descreva com suas palavras a representação gráfica formada pela função f.
b) Identifique a expressão algébrica da função f.
c) Fatore a função encontrada no item b) em funções polinomiais do primeiro grau e esboce cada um de seus gráficos no mesmo plano cartesiano.
d) Descreva com suas palavras os gráficos construídos no item c).

Fonte: os autores.

À luz da TCC, cada item das tarefas foi cuidadosamente elaborado, pensando nas diferentes situações a serem propostas para os estudantes resolverem: descrição da representação gráfica, identificação de expressões algébricas, multiplicação ou fatoração de funções, e construção de gráficos. Cada uma dessas situações demanda diferentes representações: gráfico cartesiano; representação algébrica; representação numérica; linguagem natural, além de diversos símbolos necessários para sua resolução. Além disso, essas tarefas têm o potencial de articular as funções afim e quadrática, fato que nem sempre é contemplado nas aulas de matemática e livros didáticos da Educação Básica.

Nos itens em que o estudante busca as funções associadas aos gráficos (1b e 2b) e naqueles em que são realizadas operações algébricas (1c e 2c), é esperado que a forma operatória do conhecimento seja manifestada pelos estudantes; como da mesma forma, nos itens em que o estudante descreve os gráficos por ele construídos (1e e 2d), é esperado que a forma predicativa do conhecimento possa ser manifestada, ou seja, a descrição em linguagem natural[3] da construção gráfica realizada pelo participante. Esclarecemos que, embora os itens (1a e 2a) demandem a interpretação em linguagem natural dos estudantes para o gráfico apresentado, não assumimos, aqui, a possibilidade de manifestação da forma predicativa do conhecimento, pelo fato de os gráficos em questão não terem sidos construídos pelos estudantes, embora essas sejam questões essenciais para a análise de interpretação gráfica.

Dentre os fatores limitantes para a implementação das tarefas, destacamos a pandemia da Covid-19, que se desenvolveu no período de realização da pesquisa. Em razão da referida pandemia, durante o período de coleta de dados, as atividades acadêmicas presenciais estavam suspensas em diversas escolas e universidades. Por esse motivo, a coleta de dados ocorreu de maneira remota e síncrona, sendo realizada durante o horário de aula da turma.

As análises foram realizadas com base na TCC, buscando identificar as representações simbólicas e estratégias de resolução, sejam elas corretas ou não. Ainda com base na TCC, voltamos nossa atenção aos conhecimentos equivocados explícitos e, possivelmente, os implícitos manifestados pelos estudantes.

Análise dos dados

Como forma de organizar as análises, abordamos cada item das tarefas mediante o objetivo com que foi elaborado. Sendo assim, analisamos nas estratégias dos estudantes, a descrição em linguagem natural dos gráficos, a apresentação da função associada ao gráfico, as operações algébricas com as funções estabelecidas e a construção de gráficos.

Para nomearmos os estudantes, preservando seu anonimato, eles foram identificados de acordo com a ordem de recebimento dos protocolos em sequência numérica, entre A1 e A13. As resoluções apresentadas pelos estudantes foram elencadas como adequadas, parcialmente adequadas e inadequadas, considerando o desenvolvimento apresentado por eles. Como a resolução dos itens das tarefas são dependentes entre si, os itens das tarefas foram analisados individualmente. Optamos por proceder na análise desta forma, pois existem casos em que, embora a resposta final esteja divergente da resposta esperada, isto pode ser fruto de erros em itens anteriores, e não erros naquele item em específico.

Consideramos como respostas adequadas aquelas que atenderam ao que foi proposto no enunciado, de acordo com o esperado para estudantes do 4° ano do curso de licenciatura em matemática. Interpretamos como parcialmente adequadas as respostas que, embora não estejam divergentes da resposta esperada, estão incompletas. Já as respostas inadequadas não respondiam o que foi proposto no enunciado. Por fim, tarefas não realizadas foram aquelas em que o estudante não apresentou desenvolvimento ou argumentação matemática.

O Quadro 1 a seguir apresenta uma síntese da distribuição das respostas apresentadas pelos estudantes, bem como os tipos de erros que foram encontrados.

Quadro 1 – Distribuição das respostas apresentadas pelos estudantes

<table>
<tr><th></th><th>Adequada</th><th>Parcialmente adequada</th><th>Inadequada</th><th>Não realizada</th><th>Tipos de erros identificados e em que tarefas foram manifestados</th></tr>
<tr><td>1a</td><td>3</td><td>9</td><td>1</td><td>0</td><td rowspan="9">• Descrição dos gráficos sem rigor matemático (1a, 1e, 2a e 2d);
• Nomenclatura incorreta de elementos da função e de seu gráfico (1a, 1e, 2a e 2d);
• Utilização de técnicas que não respondem à tarefa (1b e 1c);
• Erros em cálculos algébricos (1c e 2b);
• Apresentação de um gráfico não correspondente à função (1d); e
• Apresentação de resposta sem argumentação matemática (2b e 2c).</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>8</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1c</td><td>9</td><td>1</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>11</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1e</td><td>9</td><td>3</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>1</td><td>12</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2c</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2d</td><td>1</td><td>5</td><td>1</td><td>6</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Primeiramente, voltamos nossa atenção para os itens 1a e 2a das tarefas, os quais solicitavam que fosse realizada a *descrição dos gráficos* dados nos enunciados. Como respostas adequadas, esperávamos que fossem descritos, utilizando rigor matemático, ao menos, os interceptos com os eixos x e y, vértices, concavidades, crescimento ou decrescimento, e que os gráficos das funções fossem identificados como retas, parábolas ou curvas.

Identificamos que três (03) estudantes responderam o item 1a corretamente, e um

(01), ao item 2a. Como exemplo de descrição adequada, trazemos a resolução do estudante A2, na qual ele enuncia: "*É uma parábola com concavidade voltada para cima, com raízes* $x = -6$ *e* $x = 6$*,* $x_v = 0$*,* $y_v = -9$". Nela, o estudante aponta o comportamento da parábola, suas raízes e seu vértice corretamente.

Como exemplo de uma resolução parcialmente adequada quanto à descrição dos gráficos dados pelo enunciado, trazemos as resoluções apresentadas pelos estudantes A6 e A7, que respectivamente afirmam: "*Duas retas distintas com um único intercepto*" e "*O gráfico é uma parábola*". Nesses exemplos, notamos que, embora as afirmações apresentadas pelos estudantes estejam corretas, não foram explicitados elementos como raízes, interceptos e o comportamento das retas ou parábola. Identificamos nove (09) resoluções parcialmente adequadas no item 1a e doze (12) no item 2a.

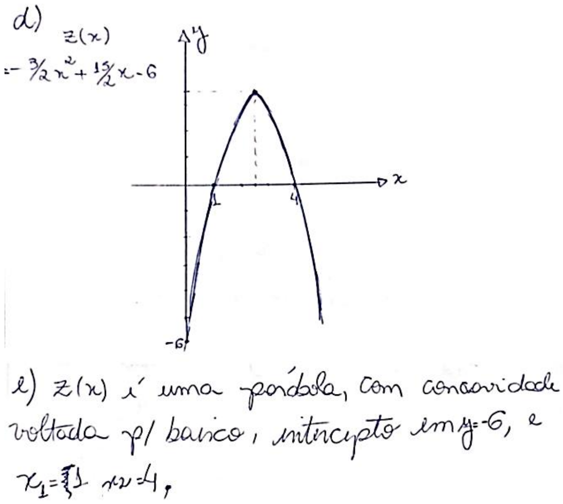
Também elencamos como resoluções parcialmente adequadas aquelas em que estudantes não apresentaram rigor matemático ao descrever o gráfico, utilizando termos não adequados matematicamente. Nessas resoluções, surgiram frases como "*parábola crescente*" e "*parábola positiva*"; também houve casos da inversão do "eixo x" por "plano x", dentre outros termos que não são adequados matematicamente.

Apenas o estudante A10 apresentou uma resolução inadequada para os itens 1a e 2a, apresentando como resposta para o item 1a a pergunta: "*Um x?*". Ao observarmos o protocolo do estudante, notamos que ele se pauta em elementos do gráfico para resolução dos itens seguintes da tarefa, o que possivelmente indica a não compreensão daquilo que foi solicitado no enunciado. Essa inferência é reforçada pelo que foi apresentado pelo mesmo estudante no item 2a em que ele descreve o gráfico como "*Uma parábola*", descrição que, embora simples, está parcialmente adequada, pois apenas omite outros aspectos do gráfico.

Ainda em se tratando da descrição dos gráficos, mas agora especificamente sobre os itens 1e e 2d, que demandavam a descrição dos gráficos que foram construídos pelos estudantes durante o desenvolvimento das tarefas, notamos uma diferença entre as descrições realizadas nos itens 1a e 2a.

Uma dessas diferenças pode ser observada nos itens 1a e 1e. O item 1a apresentou três (03) resoluções adequadas e nove (09) parcialmente adequadas, enquanto o item 1e, que demandava a descrição de um gráfico construído ao longo da tarefa, apresentou nove (09) resoluções adequadas e três (03) parcialmente adequadas. Ainda, para o item 1e, os estudantes apresentaram e descreveram mais elementos do gráfico corretamente. Tomemos como exemplo o estudante A5: na descrição realizada no item 1a de um gráfico dado no enunciado, ele apresenta como resposta que "*f e g formam duas retas, uma crescente e uma decrescente*". Ao confrontarmos essa descrição com aquela apresentada em um gráfico construído pelo próprio estudante no item 1e, apresentada na figura 1, notamos que ele realizou uma descrição mais detalhada quando se embasava em sua construção.

Figura 1 – Resolução apresentada pelo estudante A5 para os itens 1d e 1e



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Embora tenhamos identificado maior índice de resoluções adequadas nos itens 1e e 2d, se comparados aos itens 1a e 2a, observamos alguns erros conceituais, como é o caso do estudante A3, que mesmo tendo apresentado uma resolução adequada para o item 1a, descreveu uma função quadrática como uma "função decrescente" no item 1e, fato que é incorreto, além de omitir elementos do gráfico.

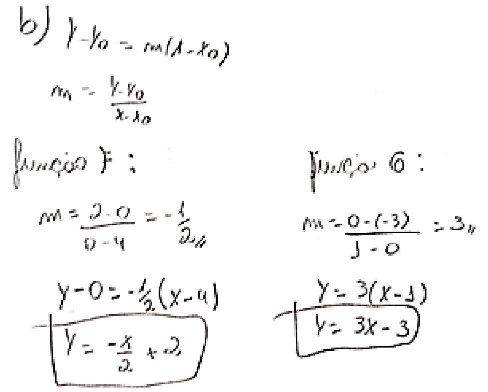
Essa falta de rigor matemático ou a utilização de termos que não são matematicamente adequados fica mais evidente quando observamos as descrições realizadas no item 2d. Nesse item, identificamos cinco (05) resoluções parcialmente adequadas e uma resolução inadequada. Dificuldades na interpretação gráfica semelhantes a essas são apresentadas também por Nunes e Santana (2017), quando destacam dificuldades de estudantes ao "[...] identificar e relacionar os termos, talvez por possuírem apenas uma noção intuitiva de relação entre conjuntos" (NUNES; SANTANA, 2017, p. 69). Dificuldades desse tipo reforçam a hipótese de que conceitos relacionados às funções talvez não estejam bem estabelecidos entre alguns dos sujeitos da pesquisa.

Ainda analisando a dificuldade desses estudantes ao realizarem a descrição de um gráfico, apontamos para a questão que, embora cinco (05) estudantes tenham apresentado a função esperada para o item 2b, apenas um (01) realizou uma descrição adequada do gráfico construído no item 2d, apontando uma disparidade entre a capacidade desses estudantes quanto ao saber fazer e ao saber explicar.

No que se refere aos itens 1b e 2b das tarefas, que solicitavam aos estudantes a função associada ao gráfico dado no enunciado, para a resolução desses itens, os estudantes recorreram a estratégias diversas. Dentre as estratégias adotadas que resultam em soluções corretas, citamos a realização de manipulações algébricas das equações $ax + b = 0$ e $ax^2 + bx + c = 0$, a utilização da equação reduzida da reta $y = mx + n$, a utilização de softwares de geometria e a tentativa e erro.

Dentre os treze (13) estudantes, oito (08) deles responderam corretamente ao item 1b e cinco (5) ao item 2b. Na figura 2, a seguir, apresentamos um exemplo de resolução do item em que foi utilizada a equação reduzida da reta.

Figura 2 – Resolução apresentada pelo estudante A9 item 1b



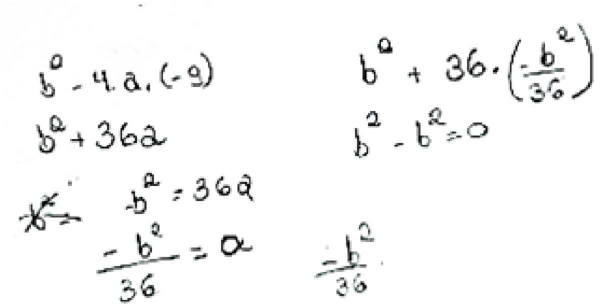
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Dentre as soluções parcialmente adequadas para os itens 1b e 2b, identificamos duas situações: a primeira associada ao item 1b, em que os estudantes encontraram apenas uma das funções corretamente; e a segunda situação relacionada ao item 2b, em que os estudantes apenas apresentaram a resposta final, sem argumentação matemática.

Entre esses treze (13) estudantes, cinco (05) apresentaram dificuldades ao demonstrar a função associada ao gráfico dado no enunciado, especialmente no item 2b, em que quatro (04) participantes da pesquisa apresentaram respostas inadequadas e um (01) não apresentou resposta. Destacamos, ainda, outros quatro (04) estudantes que apresentaram a função correta para o item 2b, mas fizeram isso sem que houvesse um desenvolvimento associado àquela resposta. Embasados em Vergnaud (2009a; 2009b), inferimos que os sujeitos colaboradores desta pesquisa não tinham esquemas prontos para partir da representação gráfica de uma função e apresentar sua expressão algébrica, ou seja, as tarefas propostas, itens 1b e 2b, caracterizam-se como uma situação nova para os estudantes, para a qual não possuíam esquemas organizados para resolver, de forma que tiveram de buscar por diversas estratégias para apresentar uma solução, que na maioria dos casos não foi adequada.

Como exemplo das dificuldades manifestadas pelos estudantes, apresentamos, na Figura 3, um fragmento da resolução do estudante A6 para o item 2b.

Figura 3 – Fragmento da resolução apresentada pelo estudante A6 para o item 2b



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

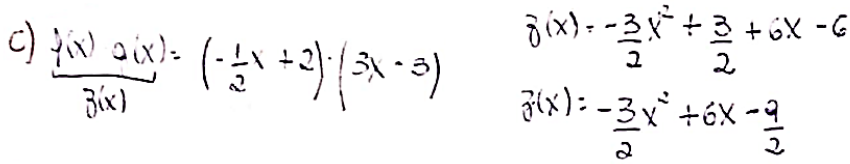
Na resolução apresentada, o estudante buscou acionar esquema na forma de algoritmo algébrico para encontrar a função quadrática associada ao gráfico do enunciado, uma estratégia válida de resolução, mas empregou conhecimentos equivocados ao substituir uma variável encontrada na mesma equação utilizada para encontrá-la. Analisando o desenvolvimento apresentado, notamos que, embora ele tenha determinado os termos a e c corretamente, o estudante buscou substituir esse termo na equação $\Delta = b^2 - 4ac$, a mesma equação utilizada para determinar o termo a, enquanto, nesse caso, seria adequado realizar a substituição de a e c na equação $ax^2 + bx + c = 0$. As dificuldades destacadas aqui também são apontadas por Nunes e Santana (2017).

Com relação às operações algébricas com as funções identificadas pelos sujeitos, que foram solicitadas pelos itens 1c e 2c das tarefas, no item 1c, nove (09) estudantes apresentaram respostas adequadas, em que todos realizaram a multiplicação entre as funções corretamente. Já no item 2c, apenas dois (02) participantes apresentaram respostas adequadas, ambos utilizando produtos notáveis para obter a forma fatorada da função quadrática.

Quanto às soluções inadequadas apresentadas para os itens 1c e 2c, especificamente quanto ao item 1c, três (03) estudantes apresentaram soluções incorretas. Nesse item, erros como somas incorretas e casos em que o estudante multiplicou apenas a parte numérica do termo, não operando a incógnita, puderam ser percebidos.

Seguem dois exemplos representativos dessa classe de erros na Figura 4.

Figura 4 – Resolução apresentada pelo estudante A2 para o item 1c

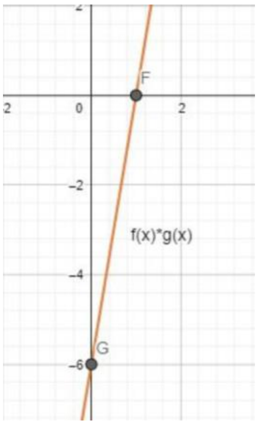


Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Encontramos outras resoluções semelhantes à apresentada, em que é possível observar que, na multiplicação entre as funções afim, ao realizar a multiplicação dos termos $-\frac{1}{2}x$ e -3, possivelmente o estudante A2 tenha esquecido de operar a variável x, resultando em um erro algébrico. Embora os participantes da pesquisa sejam de estudantes do 4º ano de licenciatura em matemática, erros semelhantes a esse são apresentados por Burigato e Bittar (2008), ao trabalharem com estudantes da oitava série (atual sétimo ano); e por Cury e Cassol (2004), quando tratam de estudantes que apresentaram erros ao realizarem operações como a distributiva ou no lapso da escrita de algum termo ou notação.

Por fim, quanto à construção dos gráficos, dentre os treze (13) estudantes, apenas um deles apresentou uma resposta inadequada referente à construção do gráfico, apresentando um gráfico distinto da função encontrada por ele no item 1d. O estudante A7 recorreu ao uso do *GeoGebra* para a construção do gráfico, conforme apresentado na Figura 5, e mesmo que tenha apresentado resoluções adequadas nos itens anteriores, encontrando a função quadrática que de fato deveria ser esboçada, ele possivelmente cometeu um erro ao inseri-la no software, não incluindo o expoente 2 no termo ax^2.

Figura 5 – Resolução apresentada pelo estudante A7 para o item 1d



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Observamos que o estudante não identificou que a construção realizada não representa uma função quadrática, e sim uma função afim. Considerando que nossas análises se pautaram nos protocolos apresentados pelos estudantes, podemos apenas inferir possíveis situações que levaram o participante a não identificar a incoerência citada. Assim, o erro apresentado pode ser fruto tanto de algo ocasional e não sistêmico, ligado a um momento de desatenção, como pode refletir uma grave lacuna na formação desse estudante, por não perceber que a multiplicação entre duas funções afim resulta em uma função quadrática, lacuna que pode estar ligada à possibilidade de que ele não tenha vivenciado situações como essa no decorrer de seu processo escolar, como preconiza Vergnaud (2009a; 2009b).

Em relação ao item 2d, seis (06) estudantes não realizaram a construção do gráfico, em decorrência da não resolução de itens anteriores. Essa situação nos alarma quanto a conceitos de função e noções de álgebra, que possivelmente não estão bem estabelecidos entre esses seis (06) estudantes. O fato de tais participantes não apresentarem a função demandada pelo enunciado, mesmo apoiados pela possibilidade do uso de recursos tais como o GeoGebra, reforça a ideia de que se tratou de uma situação nova para eles, para a qual não possuíam esquemas estabelecidos para resolver.

Considerações finais

Esta pesquisa buscou analisar conhecimentos manifestados por estudantes de licenciatura em matemática durante o desenvolvimento de tarefas sobre funções quadrática e afim à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Para atingir tal objetivo, foram elaboradas e implementadas duas tarefas matemáticas junto a estudantes de um 4º ano de licenciatura em matemática, futuros professores, de uma universidade estadual do centro-oeste do Paraná.

Quanto às resoluções apresentadas pelos estudantes e suas estratégias, notamos equívocos, as quais foram agrupadas em: i) descrição dos gráficos, não explicitando diversos elementos dispostos neles; ii) dificuldade para apresentar as funções correspondentes aos gráficos; iii) erros algébricos.

Quanto às descrições dos gráficos realizadas pelos estudantes, aqui associadas à forma operatória do conhecimento, podemos tecer algumas inferências. Foi perceptível a diferença apresentada pelos estudantes ao descreverem gráficos dados pelo enunciado daqueles que foram construídos por eles. Todavia, analisando as resoluções inadequadas e parcialmente adequadas, observamos alguns erros conceituais e a utilização de termos matematicamente inadequados, de forma que seis (06) estudantes demonstraram dificuldades ao realizar a descrição dos gráficos, possivelmente por se tratar de uma situação não usual ou nova a eles.

Para Vergnaud (1996; 2008a), a passagem da forma operatória do conhecimento para a forma predicativa de um determinado objeto é de um dos maiores desafios da escola, e os estudantes não são preparados para realizar esse tipo de *trabalho de explicitação*. Vergnaud (2008b, 2002) afirma, ainda, que a aprendizagem de um conceito concerne tanto a sua forma operatória quanto sua forma predicativa, que devem se manifestar de maneira conjunta, algo que não é possível afirmar que tenha ocorrido entre esses seis (06) estudantes citados.

O segundo ponto no qual nos debruçamos foi quanto aos erros e dificuldades manifestadas por estudantes para, partindo de um gráfico, apresentar a função que é associada àquele gráfico, incluindo, aqui, erros algébricos. Dentre os treze (13) estudantes, cinco (05) manifestaram dificuldades em enunciar a função associada ao gráfico dado pelo enunciado, e dentre os outros oito (08) estudantes, quatro (04) apresentaram a função sem argumentação matemática. Essa dificuldade corrobora para afirmarmos que ao menos cinco (05) colaboradores desta pesquisa não possuíam esquemas prontos para, partindo de uma representação gráfica, enunciar sua expressão algébrica, caracterizando-se como uma situação nova para eles.

Os estudantes não possuírem esquemas prontos para esta situação, especialmente por se tratar de futuros professores de matemática, chama atenção, pois indica que ao longo da formação escolar, na Educação Básica e na graduação, eles não tiveram ou pouco tiveram oportunidades de resolver tarefas como as discutidas nesta pesquisa. Embasados em Vergnaud (2009a; 2009b), essa falta de situações variadas ao longo do processo de formação desses estudantes e os erros e dificuldades manifestados indicam que o conceito de função não está bem estabelecido entre eles.

Destarte, os resultados da pesquisa mostram que o conceito de função, que deve ser oficialmente estudado desde o 9º ano do Ensino Fundamental, aprofundado no decorrer da escolarização e retomado no decorrer do curso de licenciatura em matemática, não se trata de um conceito de simples compreensão pelos estudantes, mas de um tópico que gera dificuldades e incompreensões até mesmo por parte dos estudantes futuros professores de Matemática.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BURIGATO, S. M. M. S.; BITTAR, M. Teoremas em ação utilizados pelos alunos na fatoração de expressões algébricas. **Educação Matemática Pesquisa**, v.10, n.2, p. 313-330, 2008.

CALADO, T. V. **Invariantes operatórios relacionados à generalização**: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim. Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2020.

CAMPITELI, H. C.; CAMPITELI, V. C. **Funções.** Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

CURY, N. H.; CASSOL, M. Análise de Erros em Cálculo: uma Pesquisa para Embasar Mudanças. **ACTA SCIENTIAE**, v.6, n.1, p.27-36, julho, 2004.

LLANOS, V. C. **Enseñanza de la Matemática mediante Recorridos de Estudio e Investigación (REI) en la escuela secundaria: diseño, puesta en aula y análisis de seis implementaciones**. 2012. 513 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciencia e Educação Matemática) - Universidad Nacional de Centro de la Provincia de Buenos Aires, Buenos Aires, 2012.

MIRANDA, C. A. **Situações-problema que envolvem o conceito de função afim**: uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus de Cascavel, 2019.

NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V. Mapeando o campo conceitual da função afim: primeiros passos. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v.21, n.5, p.193-204, 2019.

NUNES, C. B.; SANTANA, E. R. S. Concepções Errôneas de Alunos de Licenciatura em

Matemática sobre o Conceito de Função. **JIEEM**, v.10, n.2, p.65-71, 2017.

PIRES, R. F.; MERLINE, V.; MAGINA, S. Função: Concepções Manifestadas por um Grupo de Professores. **Educação Matemática em Revista**, v.20, n.44, p. 21-29, 2015.

REZENDE, V.; BORGES, F. A. Futuros professores de Matemática nos Anos Iniciais e suas estratégias diante de problemas do campo conceitual aditivo. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo v.19, n.1, p.327-352, 2017.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. **Anais** do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 1993, p.1-16.

VERGNAUD, G. A trama dos Campos Conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEEMPA**, Porto Alegre, n. 4, p.9-20, julho, 1996.

VERGNAUD, G. A incorporação dos professores na teoria dos campos conceituais: contribuição em homenagem a Claude Comiti. Tradução: Camila Rassi, p. 1-15, original em francês: Vergnaud, G. (2002). La prise en compte de l'enseignant dans la théorie des champs conceptuels. Conférence à la journée scientifique en l'honneur de Claude Comiti. In A. BESSOT (Ed.). **Formation des enseignants et Étude Didatictique de l'Enseignant**. Actes de la journée scientifique en l'honneur de Claude Comiti, pp.3-19. Grenoble: CNRS/ INPG/UJF. Disponível em: <https://vergnaudbrasil.com/>. Acesso em: 16 dez. 2021.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, E. P. (Org). **Por que ainda há quem não aprende?** 2 ed. Petrópolis: Vozes, 2003.

VERGNAUD, G. Cultura e conceitualização: Não há uma sem a outra. Tradução: Maria Lucia Faria Moro. p. 1-19, original em francês: VERGNAUD, G. (2008a). **Culture et conceptualisation**; l'une ne vas pas sans l'autre. Carrefours de l'Éducation, 2 (26), 83-98. Disponível em: <https://vergnaudbrasil.com/>. Acesso em: 12 out. 2021.

VERGNAUD, G. Da didática das disciplinas à didática profissional, nada mais que um passo. Tradução: Maria Lucia Faria Moro. p. 1-7, original em francês: VERGNAUD, G. (2008b). **De la didactique des disciplines à la didactique professionelle**: il n'y a qu' unseulpas. Travail et Apprentissages, 1. Disponível em: <https://vergnaudbrasil.com/>. Acesso em: 12 out. 2021.

VERGNAUD, G. O que é aprender. In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009a. p. 13-35.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Editora UFPR, 2009b.

VERGNAUD, G. Da mímica à psicologia das competências complexas. **Entrevista** por Luca Rischbieter, p. 1-21, 2011. Disponível em: <https://vergnaudbrasil.com/>. Acesso em: 18 out. 2021.

VERGNAUD, G. Quais questões a Teoria dos Campos Conceituais busca responder?. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, Online, v. 9, n. 1, 2019.

Notas

---

[1] Agradecemos ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM) da Universidade Estadual do Paraná, bem como à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo financiamento da revisão e tradução deste artigo.
[2] GEPeDiMa: https://prpgem.wixsite.com/gepedima
[3] Nesta pesquisa, como linguagem natural, entendemos a língua portuguesa escrita.

Sobre os autores

Leonardo Ferreira Zanatta
Mestrando em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM da Universidade Estadual do Paraná – Unespar, graduado em Administração e em Matemática pela mesma universidade. Atua como acessor técnico no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática PRPGEM - Unespar. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa). E-mail: leonardo.zanatta04@gmail.com Orcid: https://orcid.org/0000-0003-4961-8875

Veridiana Rezende
Professora Associada da Universidade Estadual do Paraná (Unespar). Faz parte do corpo docente do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PRPGEM) da Unespar e do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática - PPGECEM (Mestrado e Doutorado) da Universidade do Oeste do Paraná (Unioeste). É líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa). E-mail: rezendeveridiana@gmail.com Orcid: https://orcid.org/0000-0002-4158-2196

Recebido em: 07/05/2022
Aceito para publicação em: 22/06/2022