Programa de Pós-Graduação em Educação
Universidade do Estado do Pará
Belém-Pará- Brasil

Revista Cocar. V.15 N.32/2021 p.1-23 ISSN: 2237-0315

Conhecimentos algébricos mobilizados por alunos do ensino fundamental com a utilização de sequências didáticas

Algebraic knowledge mobilized by elementary school students using didactic sequences

Emivan da Costa Maia
Leonardo Dourado de Azevedo Neto
Universidade Federal do Amazonas – UFAM
Humaitá – Amazonas – Brasil

Resumo
Esta pesquisa tem por objetivo compreender os desafios enfrentados por alunos do ensino fundamental ao resolverem situações-problema que envolvam as diferentes interpretações da álgebra escolar. Para isto, utilizou-se, como referenciais teórico e metodológico, a Teoria das Situações Didáticas e a Engenharia Didática. Aplicou-se uma sequência didática contemplando problematizações envolvendo equações algébricas. A produção de dados ocorreu por meio de registros escritos e gravações de áudios de entrevistas realizadas no decorrer dos encontros. A partir de estratégias de resolução, observou-se a mobilização de conhecimentos através de substituições e somas de expressões algébricas. Os maiores desafios foram: estabelecer generalização e variação entre grandezas, identificar uma incógnita em um problema algébrico, compreender a ideia de variável e usar simbologia algébrica.
Palavras-chave: Educação Matemática; Teoria das Situações Didáticas; Engenharia Didática.

Abstract
This research aims to understand the challenges faced by elementary school students when solving problem situations that involve different interpretations of school algebra. For this, the Theory of Didactic Situations and Didactic Engineering were used as theoretical and methodological references. A didactic sequence was applied, contemplating problematizations involving algebraic equations. The production of data occurred through written records and audio recordings of interviews carried out during the meetings. From resolution strategies, it was observed the mobilization of knowledge through substitutions and sums of algebraic expressions. The biggest challenges were: to establishing generalization and variation between quantities, to identify an incognita in an algebraic problem, to understand the idea of variable and to use algebraic symbology.
Keywords: Mathematics Education; Theory of Didactic Situations; Didactic Engineering.

1. Introdução

O objeto matemático, de estudo deste trabalho, está inserido dentro do bloco de conteúdos "Álgebra e Funções" que estuda a ideia de variável, representada por letras, de um número em um conjunto de regras definidos por equações algébricas.

Ao estudar álgebra os alunos desenvolvem habilidades de abstração, além de adquirirem uma ferramenta a mais para resolverem situações-problema. Nesse sentido, é mais proveitoso propor situações que os leve a serem capazes de arquitetar princípios algébricos só de observarem parâmetros em esboços, índices, tabelas e assim elaborar relações (BRASIL, 2017).

À vista disso, não é recomendável que os alunos estudem álgebra apenas por meio de cópias do quadro branco e listas de exercícios. O professor precisa criar situações que os coloque em desequilíbrio para que possam construir saberes acerca da álgebra. Esse desequilíbrio proporciona a busca por estratégias de resolução, novas técnicas, simulações, levantamentos de conjecturas, fatos que contribuem para a mobilização de conhecimentos.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), não se usufrui, de maneira específica, o entendimento de variável no ensino fundamental. Isso ocasiona pensamentos de que, em equações algébricas, as letras servem apenas para mostrar ou ocultar um número que se desconhece, vista, na maioria das vezes, como um mistério para os alunos.

No entanto, as equações algébricas dão possibilidades de os estudantes enxergarem outras funções das letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações. Proporciona, ainda, que se posicionem de maneira crítica nas situações-problema, fazendo a utilização de conversas, discussões, diálogos e assim poderem tomar decisões (MARTINS et al., 2016).

Atualmente presencia-se graves falhas relativas ao ensino da álgebra e sua compreensão por parte dos alunos, uma vez que os mesmos não estão conseguindo atingir um pensamento que podem levá-los a resolverem problemas que envolvam este conteúdo matemático, ou seja, não estão sendo capazes de fazer relações, reconhecer padrões e muito menos generalizações (COSTA JÚNIOR; SILVA, 2016).

Por consequência, os alunos possuem uma visão de que estudar álgebra é apenas solucionar equações, resolver problemas, e fazendo isso de maneira engessada, onde as letras estão ali com a funcionalidade de representar números, sem que compreendam as grandezas que estão envolvidas (MARTINS; DIAS, 2013). Como quebra desta realidade observada, pode-se pensar em maneiras para que o processo de ensino e aprendizagem da álgebra se qualifique e assim contribua para à alfabetização científica.

Observa-se, então, que o aprendizado deficiente da álgebra, por parte dos alunos, podem ter suas origens oriundas dos estudos de aritmética, no qual as metodologias com que eles estudam os números e as manipulações das quatro operações matemáticas, podem não ser as mais adequadas (COSTA JÚNIOR; SILVA, 2016).

No ensino fundamental, a BNCC, documento de caráter normativo, em relação ao ensino da álgebra, relata que os alunos devem entender os distintos "significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas" (BRASIL, 2017, p. 268-269). Deste modo, é essencial a determinação de ligações entre variável e função e de incógnita e equação.

Nesse sentido, o professor de ensino fundamental, ao ensinar álgebra, possui em suas mãos uma responsabilidade, uma vez que esse ensino está ligado numa mudança de manipulações saindo do trabalho apenas com números para o uso de expressões que utilizam letras em suas representações. Nesta perspectiva, "vale salientar a importância do modo como esse 'acréscimo' é feito, pois se não o for bem introduzido, o aparecimento das letras nas expressões pode ser encarado como um enigma para os alunos, capaz de refletir negativamente em sua formação" (MARTINS et al., 2016, p. 1).

Isto posto, um dos motivos que dificultam o ensino da álgebra pode ser a maneira como o conteúdo é apresentado logo de início, faltando mostrar para os alunos uma relação que este estudo possui com fatos vivenciados no cotidiano deles, dificultando a compreensão e a construção de novos conhecimentos (MACEDO et al., 2016).

Portanto, objetiva-se compreender os desafios enfrentados por alunos do ensino fundamental ao resolverem situações-problema que envolvam as diferentes interpretações da álgebra escolar.

2. Aporte teórico e metodológico

Nesta pesquisa, utiliza-se a Teoria das Situações Didáticas (TSD) como referencial teórico. Deste modo, discute-se ideias de *devolução*, *situações adidáticas* e *meio adidático*. Como referencial metodológico, emprega-se a Engenharia Didática (ED) que, em conjunto com a TSD, direcionam a elaboração, desenvolvimento e análise da sequência didática.

De acordo com Pais (2018, p. 102), uma sequência didática "é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo conceitos previstos na pesquisa didática".

2.1 Teoria das Situações Didáticas – TSD

Proposta pelo educador Guy Brousseau (1996, 2008), a TSD "trata de formas de apresentação, a alunos, do conteúdo matemático, possibilitando melhor compreender o fenômeno da aprendizagem da Matemática" (FREITAS, 2016, p. 77).

A TSD é uma ferramenta significativa em pesquisas relacionadas a aprendizagem e ao ensino da matemática por proporcionar situações em que os alunos, na busca de soluções, possam construir seus conhecimentos.

Esse processo de construção do conhecimento é diretamente influenciado pelo *meio*, e o professor, ao organizá-lo, cria condições para que os alunos se envolvam na construção dos saberes matemáticos. "O meio é onde ocorrem as interações do sujeito, é o sistema antagonista no qual ele age" (FREITAS, 2016, p. 79).

Ao ocorrer um desequilíbrio provocado por uma alteração no meio, inicia-se o processo de aprendizagem de novos conhecimentos. Tais alterações podem ocorrer por meio da apresentação de novos problemas, fatos que requerem a construção de novos saberes, proporcionando a mobilização de conhecimentos pelos alunos.

Brousseau (2008, p. 19) define *situação* como sendo "o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento, como o recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável".

Uma *situação didática* é todo o contexto que envolve o estudante, nele inseridos o professor e o sistema educacional (BROUSSEAU, 2008). Assim, pode-se dizer que são formadas pelas "múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico" (PAIS, 2018, p. 65).

À vista disso, uma sequência didática deve ser elaborada considerando aspectos que podem influenciar na aprendizagem dos alunos. Nesse caso, o professor deve formalizar não a simples apresentação de um enunciado, mas a devolução de um bom problema.

A *devolução* "é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de sua situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência" (BROUSSEAU, 2008, p. 91).

Na devolução de uma situação, o professor tem a responsabilidade de preparar, organizar e acompanhar o desenvolvimento dela, não influenciando no saber em jogo, para que os alunos vivenciem a situação como se fossem pesquisadores que objetivam chegar à solução do problema sem a ajuda explícita do professor. Essa conjectura define uma situação adidática.

Uma *situação adidática* se configura "essencialmente pelo fato de representar determinados momentos do processo de aprendizagem nos quais o aluno trabalha de maneira independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto do professor relativamente ao conteúdo matemático em jogo" (FREITAS, 2016, p. 84).

Ao vivenciar uma situação adidática, os alunos passam a percorrer fases que constituem a TSD, as etapas de *ação*, *formulação*, *validação* e *institucionalização*. De acordo com Pais (2018, p. 72), a *situação de ação* é "aquela em que o aluno realiza procedimentos mais imediatos para a resolução de um problema, resultando na produção de um conhecimento de natureza mais experimental e intuitiva do que a teórica".

Nesta fase, os alunos começam a interagir com a sequência didática descrevendo as primeiras ações acerca da resolução da atividade proposta. Deste modo, os estudantes oferecem a resolução do problema sem especificar as razões por eles empregadas nas suas produções, onde prevalece o caráter empírico, sem que aja o uso de conceitos e teorias.

A *situação de formulação*, é "aquela em que aluno passa a utilizar, na resolução de um problema, algum esquema de natureza teórica, contendo um raciocínio mais elaborado do que um procedimento experimental e, para isso, torna-se necessário aplicar informações anteriores" (PAIS, 2018, p. 72).

As *situações de validação* são "aquelas em que o aluno já utiliza mecanismos de provas e o saber já elaborado por ele passa a ser usado com uma finalidade de natureza essencialmente teórica" (PAIS, 2018, p. 73). Deste modo, são feitas justificativas objetivas acerca da solução do problema, por isso, esse contexto está relacionado à autenticidade do conhecimento, considerando a visão epistêmica quanto a pedagógica.

As *situações de institucionalização* possuem como propósito "buscar o caráter objetivo e universal do conhecimento estudado pelo aluno. Sob o controle do professor, é o momento onde se tenta proceder a passagem do conhecimento, do plano individual e particular, à dimensão histórica e cultural do saber científico" (PAIS, 2018, p. 73-74).

2.2 Engenharia Didática – ED

Proposta por Michèle Artigue (1996), a ED foi elaborada justamente para à análise das situações didáticas de Brousseau. Essa metodologia estuda relações de três elementos de um sistema que precisa ser destacado, chamado de sistema didático ou triângulo didático. Esses elementos são considerados os mais importantes no processo de ensino e aprendizagem de saberes matemáticos: aluno, professor e conhecimento (BROUSSEAU, 2008).

De acordo com Brousseau (2008), quando o professor interage com o conhecimento possibilita o ensino por meio da *transposição didática*, uma transformação do conhecimento científico para o escolar. Ocorrendo uma interação entre professor e aluno temos a relação pedagógica, ou seja, são elaboradas as metodologias para se chegar ao ensino. Por fim, existindo uma relação entre o aluno e o conhecimento, ocorre a produção das técnicas que os estudantes formulam para aprender um determinado conteúdo, constituindo a aprendizagem.

Brousseau (2008) relata que nenhum dos elementos do sistema didático sobrepõem ao outro, todos possuem papel importante de uma conjectura onde os três estão inseridos, fazendo parte de uma estrutura que objetiva a aprendizagem por parte dos estudantes.

Desta maneira, no ambiente de sala de aula, a ED contribui como metodologia, visto que, de acordo com Silva (2015), proporciona, justificadamente, uma organização da base teórica, oferecendo ao professor a possibilidade de conhecer o significado e aumentar o conjunto de opções, estabelecendo uma ligação entre a teoria e a prática.

Sob outra perspectiva, Artigue (1996, p. 196) caracteriza a ED "[…] por um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino".

A ED é constituída por quatro fases, as *análises preliminares*, *concepção e análise a priori*, *experimentação* e *análise a posteriori e validação*. Na análise preliminar:

> é preciso lembrar que a concepção de uma sequência de ensino não dispensa a referência de um quadro teórico sobre o qual o pesquisador fundamenta suas principais categorias. Feita essa observação, o objetivo é submetido a uma análise preliminar, através da qual se fazem as devidas inferências, tais como levantar constatações empíricas, destacar concepções dos sujeitos envolvidos e compreender as condições da realidade sobre o qual a experiência será realizada (PAIS, 2018, p. 101).

Esta fase é realizada sobretudo para fundamentar a "concepção da engenharia, porém, elas são retomadas e aprofundadas durante todo o decorrer do trabalho. É evidente que cada uma delas acontecerá ou não, dependendo do objetivo da pesquisa" (MACHADO, 2016, p. 239), sendo esse objetivo que apontará o nível de complexidade dessas análises.

Nesta etapa, destaca-se a realização de uma revisão de literatura de alguns trabalhos voltados para o ensino do objeto matemático investigado nesta pesquisa. Utilizou-se como banco de dados, trabalhos dos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, das edições dos anos de 2013 e 2016. Os artigos selecionados foram os de Martins e Dias (2013), Ramos et al. (2013), Tinoco et al. (2013), Aguiar (2016), Costa Júnior e Silva (2016) e Martins et al. (2016).

Ainda nas *análises preliminares*, realizou-se um contexto histórico da evolução da álgebra baseados na obra de Eves (2004), destacando-se o desenvolvimento no decorrer dos tempos, os pensamentos que os povos antigos tinham sobre o tema e suas maiores contribuições para a álgebra atual. Por fim, realizou-se uma análise das diretrizes atuais para o ensino de álgebra a partir da BNCC e assim teve subsídios para a elaboração da sequência didática proposta nesta investigação.

Na fase da *concepção e análise a priori* é realizado o levantamento de hipóteses das estratégias e resoluções que podem ocorrer no desenvolvimento da sequência didática. Esse momento é de extrema relevância, visto que no momento da realização das atividades "o pesquisador estará mais preparado para compreender o que esses alunos estão fazendo e, consequentemente, saber que tipo de intervenção deve realizar para favorecer a aprendizagem" (BITTAR, 2017, p. 107).

Em contrapartida, Artigue (1996) relata que:

> [...] o objetivo na análise a priori é determinar que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, ela vai se basear em hipóteses e são essas hipóteses

> cuja validação estará, em princípio, indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori a ser operada na quarta fase (ARTIGUE, 1996, p. 293).

A fase de *experimentação* é caracterizada pela aplicação da sequência de atividades com os alunos participantes. Nesta etapa as três fases das situações adidáticas (ação, formulação e validação) estarão se desenvolvendo. Assim, a fase de experimentação:

> É a fase da realização da engenharia com uma certa população de alunos. Ela se inicia no momento em que se dá o contato pesquisador/professor/observador (es) com a população de alunos, objeto da investigação. A experimentação supõe: a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação; o estabelecimento do contrato didático; aplicação dos instrumentos de pesquisa [...] (MACHADO, 2016, p. 244).

A fase da *análise a posteriori* traz à abordagem dos dados que se conseguiu com a aplicação da sequência didática, sendo a etapa da pesquisa caracterizada por fazer a discussão da parcela prática do trabalho desenvolvido (ARTIGUE, 1996). As informações são obtidas por meio de observações devidamente anotadas nos registros da atividade experimental, explanando o percurso metodológico adotado pelos alunos.

Por fim, a *validação* das informações é "obtida pela confrontação entre os dados obtidos na análise a priori e a posteriori, verificando as hipóteses feitas no início da pesquisa" (PAIS, 2018, p. 103).

3. Metodologia

A presente investigação possui uma abordagem qualitativa experimental, baseada nas concepções de Cervo et al. (2007) e de Marconi e Lakatos (2010), cujo campo foi uma escola de ensino fundamental do município de Humaitá – AM.

O tratamento das informações se baseou nas relações estabelecidas entre sujeitos sociais em produzir materiais e manifestações passiveis de análise e interpretação. Tais comportamentos produzidos tiveram a capacidade de fundamentar e construir conhecimentos relativos aos fenômenos existentes no processo de ensino e aprendizagem da álgebra.

Realizaram-se dois encontros, com duração de aproximadamente duas horas cada, no qual se aplicou, em cada encontro, um problema envolvendo a temática de equações algébricas. A produção de dados ocorreu por meio de registros escritos e gravações de áudios de entrevistas realizadas com os alunos no decorrer dos encontros.

Os participantes foram quatro alunos do 7º ano do ensino fundamental. No entanto, no decorrer das análises e discussões, explana-se produções de apenas dois que serão identificados com os nomes fictícios de João e Maria.

A escolha por esses participantes ocorreu devido o objeto matemático, de estudo desta investigação, ser trabalhado no 7º ano do ensino fundamental, pelos resultados das pesquisas da revisão de literatura que exteriorizaram dificuldades no processo de ensino e aprendizagem e pela análise da BNCC que mostraram as competências e habilidades que os alunos precisam adquirir no estudo de conhecimentos algébricos.

Ressalta-se que não serão apresentados e discutidos, neste trabalho, a revisão de literatura, o contexto histórico e a análise da BNCC.

4. Resultados e Discussão

4.1 Análises *a priori* do primeiro problema

O problema apresentado aos participantes foi: "Pedro, Fernando e Marcos possuem no total R$630,00 reais. Pedro tem o triplo de Fernando, e este, possui o dobro de Marcos. Quanto tem cada um?"

Deste modo, após a leitura e interpretação do problema, os participantes poderiam sistematizar a questão por meio de um sistema composto pelas equações: $p + f + m = 630$ (1), $p = 3f$ (2) e $f = 2m$ (3), em que a variável p representa o Pedro, a variável f o Fernando e a variável m o Marcos. Em seguida, os participantes passariam a delinear estratégias para resolvê-lo.

Na primeira estratégia, os participantes poderiam substituir a equação 2 na equação 1, acarretando em: $3f + f + m = 630$ (4). Em seguida, através de manipulações algébricas na equação 3, poderiam encontrar: $m = \frac{f}{2}$ (5). Desta forma, substituindo a equação 5 na equação 4, poderiam encontrar: $3f + f + \frac{f}{2} = 630$ (6).

Portanto, com a equação 6 sendo apresentada em função da variável f, os participantes poderiam de encontrar o seu valor e solucionar o problema.

Na segunda estratégia, partindo do sistema composto pelas equações 1, 2 e 3, os participantes poderiam substituir a equação 3 na equação 1, acarretando em: $p + 2m + m = 630$ (7). Em seguida, poderiam substituir a equação 3 na equação 2, encontrando: $p = 6m$

(8). Logo após, poderiam substituir a equação 8 na equação 7, encontrando: $6m + 2m + m = 630$ (9).

Assim, com a equação 9 estando apresentada em função da variável m, os participantes poderiam encontrar o seu valor e, posteriormente, solucionar o problema.

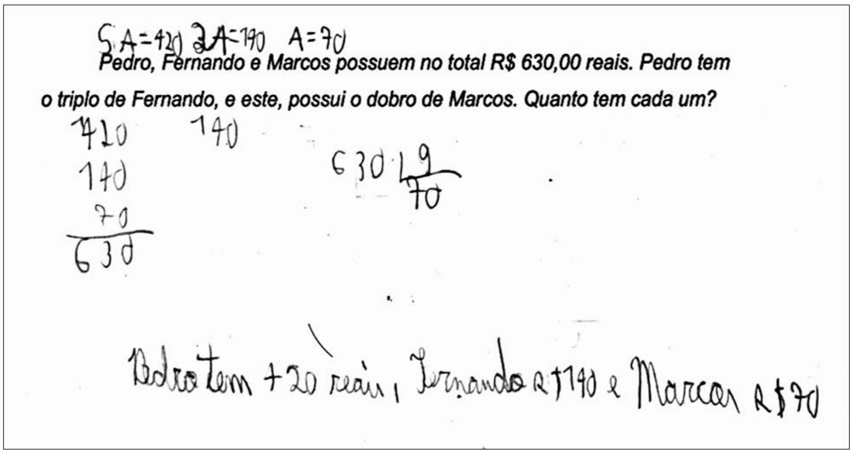
Em outra estratégia, também partindo do sistema composto pelas equações 1, 2 e 3, os alunos poderiam realizar manipulações algébricas nas variáveis das equações 2 e 3, encontrando: $p - 3f = 0$ (10) e $f - 2m = 0$ (11). Logo após, poderiam substituir a equação 2 na equação 1, ocasionando em um sistema composto pelas equações 4 e 11. Depois, multiplicando por (-4) a equação 11, encontrariam: $-4f + 8m = 0$ (12). Em seguida, somando as equações 4 e 12, os participantes poderiam encontrar o valor da variável m e, a partir desse momento, solucionar o problema investigado.

A quarta estratégia poderia ser mobilizada de maneira direta pelos participantes, por meio da seguinte interpretação: "Pedro possui o triplo de Fernando; Fernando possui o dobro de Marcos, assim, Marcos possui a metade de Fernando". Essa interpretação poderia direcioná-los, de forma imediata, para a equação 6, equação, esta, apresentada em função da variável f. Portanto, encontrando o valor da variável f, os alunos poderiam solucionar o problema.

4.2 Análises a posteriori do primeiro problema

Averiguando os registros escritos do participante João, percebe-se à apresentação direta da solução do problema proposto, estipulando valores correspondentes a Pedro, Fernando e Marcos, como mostra a figura 1 a seguir.

Figura 1 – Protocolo de resolução do aluno participante João.



Fonte: dados da pesquisa, 2018.

Como o participante João expressou a solução do problema de maneira direta, não se tinha elementos para analisar a estratégia mobilizada que o levou às respostas apresentadas. Deste modo, realizou-se uma conversa com João, relatada no diálogo a seguir.

> *"Mediadores: João, explica pra gente como você resolveu esse problema. João: Bom, nela eu utilizei uma maneira de resolver com as expressões algébricas né!? Que eu vi que, primeiramente tinha uma pessoa que tinha um valor fixo né!? Que era o Marcos. Ele tinha só a, e aí eu tinha que descobrir o valor de a né!?, depois. Aí falava que Fernando tinha duas vezes o valor de Marcos e Pedro tinha três vezes o valor de Fernando. E aí eu vi que já que Marcos tinha a, Fernando tinha $2a$, que era duas vezes o de Marcos e Pedro tinha $5a$ já que era três vezes de Fernando ai eu só peguei $3a + 2a$ que foi o de Fernando com Pedro que deu $5a$ e Marcos tinha a, Fernando tinha $2a$ e Pedro tinha $5a$ e ai eu peguei esses números de a e dividi pelo valor total de a deu 9 e eu dividi por 630 que era o valor total. Aí deu que a era igual a 70, $2a$ era igual a 140 e $5a$ era igual a 420 que foi o valor que cada um tinha. Pedro tem R$ 420,00, Fernando tem R$ 140,00 e Marcos têm R$ 70,00 reais".*

Nota-se que o participante João equacionou o problema da seguinte maneira: "$a + 3a + 5a = 630$ (13)", em que a variável a representava esse "valor fixo" enfatizado em seu discurso de resolução.

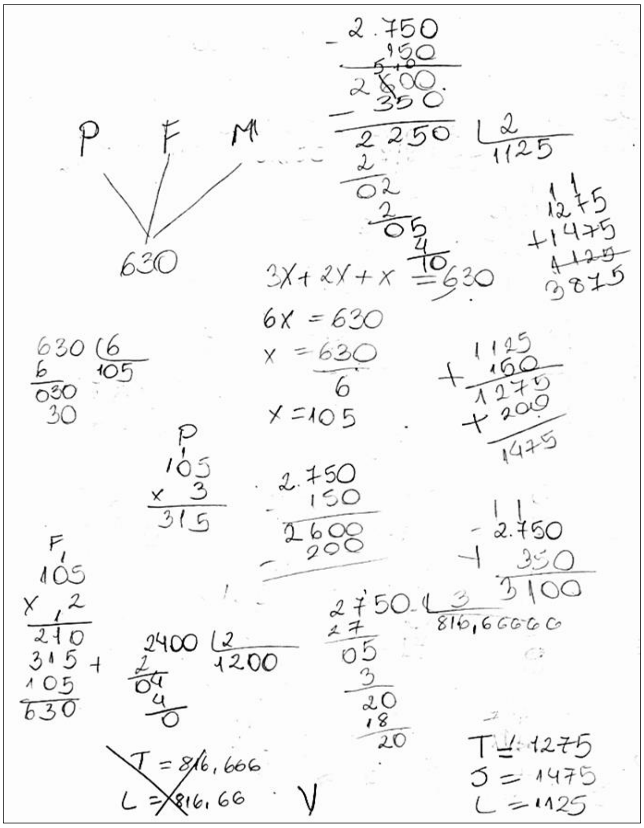
Deste modo, percebe-se que o participante João vivenciou uma situação adidática de ação ao iniciar a sua fala no seguinte trecho relatado: "Bom, nela eu utilizei uma maneira de resolver com as expressões algébricas né!? Que eu vi que, primeiramente tinha uma pessoa que tinha um valor fixo né!? Que era o Marcos. Ele tinha só a, e aí eu tinha que descobrir o valor de a né!?".

Nessa fala, o participante João começa a retirada das informações a partir da interpretação do problema, realizando as primeiras ações com o intuito de iniciar seu processo de resolução. Em seguida, João passa a vivenciar as situações adidáticas de formulação e validação realizando manipulações algébricas na equação 13, podendo ser observado em seu protocolo de resolução (figura 1).

Portanto, infere-se que o participante João mobilizou a quarta estratégia de resolução antes prevista nas análises a priori (discutida no subtítulo 4.1), apresentando o problema de forma direta. Além disso, solucionou o problema de forma correta, uma vez que o valor encontrado, associado a Pedro, é o triplo do valor encontrado correspondente a Fernando, e este, é o dobro do valor associado a Marcos.

No protocolo de resolução da participante Maria, nota-se a experimentação de uma situação adidática de ação por meio de ligações entre a aritmética e a álgebra, podendo ser vista através da figura 2 a seguir.

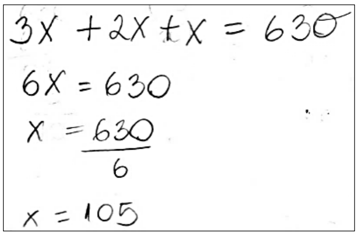
Figura 2 – Situação de ação vivenciada pela aluna participante Maria.



Fonte: dados da pesquisa, 2018.

Em seguida, observa-se que Maria passa a vivenciar uma situação adidática de formulação quando sistematizou o problema através de seu protocolo de resolução, podendo ser vista na figura 3 a seguir.

Figura 3 – Situação de formulação vivenciada pela aluna participante Maria.



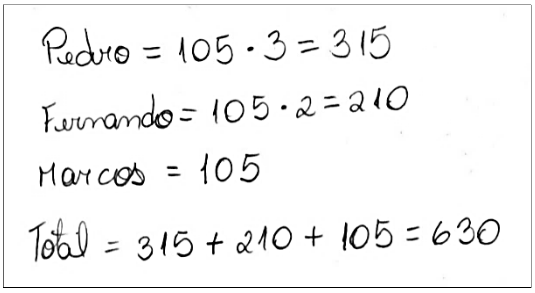
Fonte: dados da pesquisa, 2018.

Mesmo compreendendo o percurso metodológico que Maria utilizou para resolver o problema, salientou-se a importância de ouvi-la para se ter o conhecimento de como a mesma realizou os procedimentos, o áudio do diálogo é relatado a seguir.

> *"Mediadores: Maria, explica pra gente como você resolveu o problema até aqui. Maria: Bom, Pedro tem o triplo de Fernando, então tem $3x$. E Fernando possui o dobro de Marcos, então é mais $2x$ e Marcos é x que é igual a 630. Então é $6x$ porquê $3x + 2x + x = 6x$, então fica $6x = 630$. Em seguida, $x = 630/6$. Por fim, $x = 105$. E (105 x 3), porque Pedro tem o triplo é igual a 315. (105 x 2), porque Fernando tem o dobro é 210 e Marcos que é x tem 105. Depois eu somei tudo".*

Analisando o diálogo, pode-se notar que Maria passa a vivenciar uma situação adidática de validação quando sistematiza o problema e apresenta uma solução, estipulando valores correspondentes a Pedro, Fernando e Marcos, podendo ser observado através do protocolo de resolução ilustrado na figura 4 a seguir.

Figura 4 – Situação de validação vivenciada pela aluna participante Maria.



Fonte: dados da pesquisa, 2018.

Portanto, a participante Maria mobilizou a quarta estratégia de resolução antes prevista nas análises a priori (discutida no subtítulo 4.1), apresentando o problema de forma imediata. No entanto, os valores encontrados associados a Pedro, Fernando e Marcos não foram representados corretamente, mesmo a soma, desses valores, resultando em R$630,00 reais como enfatiza o problema em estudo.

4.3 Considerações do primeiro encontro

No início do encontro, os participantes se mostraram motivados em participar da pesquisa, observado através de conversas entre si e perguntas feitas acerca de como seria constituída as situações-problema da sequência didática. Deste modo, infere-se que, naquele momento, ocorreu a devolução de uma situação.

Na experimentação, tanto o participante João como a participante Maria mobilizaram a quarta técnica de resolução prevista nas análises a priori, explanando a resolução do problema de forma direta. No entanto, os valores encontrados correspondentes a Pedro, Fernando e Marcos foram distintos, solucionando corretamente o problema apenas o participante João.

Ambos os participantes vivenciaram as três fases de uma situação adidática. Assim, apresentaram comportamentos autônomos no processo de mobilização de conhecimentos, propiciando, no decorrer da atividade, ambiente científico de investigação.

Em seguida, realizou-se a institucionalização com os participantes, sendo proposto a socialização entre si de suas produções, visto que, até aquele momento da pesquisa, as relações eram diretamente entre aluno-conhecimento e vice-versa. Deste modo, a institucionalização foi uma forma de unificar técnicas e passos percorridos na resolução do problema proposto e assim chegar a um entendimento da atividade apresentada.

Por fim, explicou-se, aos participantes, o objetivo do problema, seus princípios históricos e culturais, as fases vivenciadas, as estratégias previstas nas análises a priori e as apresentadas por eles, chegando a um consenso final do primeiro encontro da sequência didática.

4.4 Análises *a priori* do segundo problema

O problema apresentado aos participantes foi: "Thiago, Lucas e José compraram um vídeo game por R$2.750,00 reais. Thiago ajudou com R$150,00 a mais do que Lucas, e José com R$200,00 a mais que Thiago. Quanto cada um ajudou para a compra do vídeo game?"

Após a leitura e interpretação do problema, os alunos poderiam mobilizar técnicas de resolução, podendo sistematizá-lo, por exemplo, através de um sistema composto pelas equações: $t + l + j = 2750$ (14), $t = 150 + l$ e (15) e $j = 200 + t$ (16), em que a variável t representa o Thiago, a variável l o Lucas e a variável j o José.

Na primeira estratégia, os participantes poderiam substituir a equação 16 na equação 14, acarretando em: $t + l + 200 + t = 2750$ (17). Conseguinte, fazendo manipulações algébricas, poderiam isolar a varável t, encontrando: $t = \frac{(2750 - l - 200)}{2}$ (18). Em seguida, poderiam substituir a equação 18 na equação 15 e encontrar o valor da variável l e, a partir desse momento, poderiam solucionar o problema proposto.

A segunda estratégia que poderia ser mobilizada, a partir do sistema composto pelas equações 14, 15 e 16, inicia do pressuposto de que os participantes poderiam encontrar uma nova equação manipulando a equação 15, desta vez isolando a variável l, assim encontrando: $l = t - 150$ (19).

Conseguinte, os participantes poderiam substituir a equação 17 e a equação 16 na equação 15, encontrando o valor da variável t e, em seguida, solucionar o problema.

Mobilizando outra estratégia de resolução, os participantes poderiam sistematizar o problema por meio de um sistema composto pelas equações: $w = y + 150$ (20) e $w = z - 200$ (21), em que a variável w representa o Thiago, a variável y o Lucas e a variável z o José. Posteriormente, começariam a pensar em estratégias para solucioná-lo.

Poderiam, por exemplo, substituir a equação 21 na equação 20, acarretando na equação: $y + 150 = z - 200$ (22). Em seguida, poderiam isolar as variáveis y e z, encontrando as equações: $y = z - 350$ (23) e $z = y + 350$ (24). Conseguinte, poderiam substituir as equações 23 e 24 na equação 22 e encontrar os valores das variáveis w, y e z, solucionando, assim, o problema em estudo.

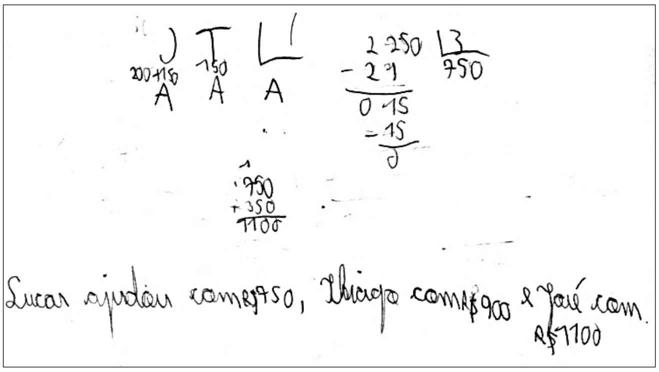
Na quarta estratégia que poderia ser mobilizada, após a leitura e interpretação do problema, os participantes poderiam sistematizar a questão de forma direta, acarretando na seguinte interpretação: "Lucas ajudou com um valor x, Thiago com um valor $x + 150$ e José com um valor $x + 200 + 150$". Deste modo, a interpretação implicaria na seguinte equação: $x + x + 150 + x + 200 + 150 = 2750$ (25).

Portanto, com o problema equacionado em função da variável x, os participantes poderiam encontrar o seu valor e, a partir desse momento, solucionar o problema proposto.

4.5 Análises *a posteriori* do segundo problema

Analisando a resolução do participante João, nota-se à apresentação de maneira direta da solução do problema proposto, estabelecendo valores correspondentes a Thiago, Lucas e José, como ilustra a figura 5 a seguir.

Figura 5 – Protocolo de resolução do aluno participante João.



Fonte: dados da pesquisa, 2018.

Como João apresentou a resolução do problema de maneira direta, não se tinha dados suficientes para analisar a técnica que o mesmo utilizou na resolução da atividade. Assim, teve-se uma conversa com ele, apresentada no diálogo relatado a seguir.

> *"Mediadores: João, explica pra gente como você resolveu esse problema. João: Bom, essa questão dois aqui é a mesma coisa dos valores fixos né!? que eu fiz na primeira questão. Que Lucas tinha o valor a, Thiago tinha o valor $a + 150$ e José tinha $a + 200 + 150$ que era o do Thiago né!? Aí eu vi que eu podia pegar todos aqueles valores a mais que eram $150 + 200 + 150$. Aí eu calculei né!? que deu 500, aí eu peguei 2.750 diminui por 500 que deu 2.250. Aí eu dividi por 3, já que eram três, pessoas e o resultado deu 750. Aí eu só peguei 750 do valor inicial de Lucas adicionei com 150 que era o valor de Thiago. Aí eu peguei 150 adicionei com 200 e depois com 150 que era o valor de José. Aí Lucas ajudou com R$ 750,00, Thiago com R$ 900,00 e José com R$ 1.100,00".*

Analisando a entrevista com João, infere-se que o problema foi equacionado da seguinte maneira: $a + a + 150 + a + 200 + 150 = 2750$ (26).

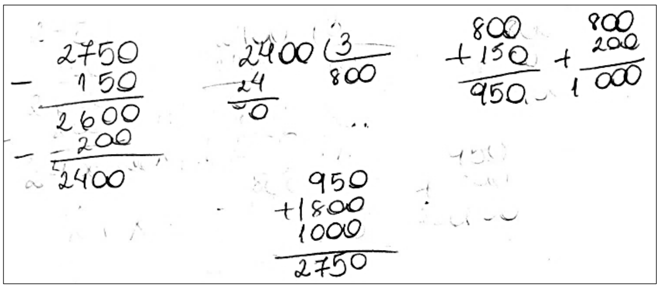
Nota-se que João fez a mobilização da quarta estratégia antes prevista nas análises a priori (discutida no subtítulo 4.4), sistematizando o problema por meio de apenas uma equação, diferenciando apenas da variável em estudo. Por consequência, identifica-se que ele vivencia uma situação adidática de ação ao dizer, especificamente, em seu relato de resolução, o seguinte trecho: "Que Lucas tinha o valor a, Thiago tinha o valor a $+ 150$ e José tinha a $+ 200 + 150$ que era o do Thiago né!? Aí eu vi que eu podia pegar todos aqueles valores a mais que eram 150+200+150".

A partir desse momento, João passa a percorrer as situações adidáticas de formulação e validação, quando realizou algumas manipulações algébricas encontrando o valor da variável a, bem como quando concedeu valores a Thiago, Lucas e José na compra do vídeo game (visto na figura 5).

Por fim, infere-se que João solucionou o problema corretamente, visto que o valor encontrado, correspondente a Thiago, é superior R$150,00 reais em relação ao valor encontrado associado a Lucas, e o valor encontrado, correspondente a José, é superior R$200,00 reais em relação ao valor associado a Thiago.

A participante Maria, em seu protocolo de resolução, fez uso de ligações entre a aritmética e a álgebra tentando sistematizar o problema, vivenciando uma situação adidática de ação, podendo ser vista através da figura 6 a seguir.

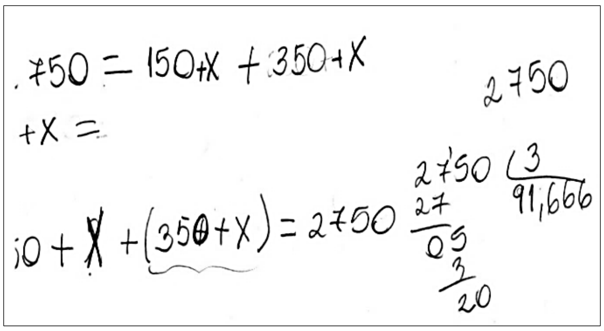
Figura 6 – Situação de ação vivenciada pela aluna participante Maria.



Fonte: dados da pesquisa, 2018.

A participante Maria começou a vivenciar uma situação adidática de formulação quando fez uso de esboços de algo teórico que poderia ajudá-la na resolução do problema, vista na figura 7 a seguir.

Figura 7: Situação de formulação vivenciada pela aluna participante Maria.



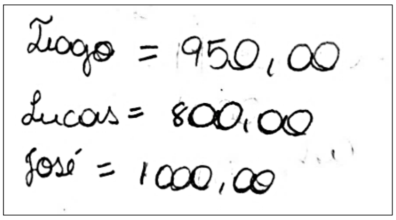
Fonte: dados da pesquisa, 2018.

Nesse momento, não se tinha dados suficientes para continuar nas análises, visto que não ficou claro como a participante validou seus dados. Neste caso, foi necessário a entrevista com Maria, relatada no diálogo a seguir.

> *"Mediadores: Maria, explica pra gente como você resolveu esse problema. Maria: Primeiro eu tentei fazer igual a questão 1, mas eu não consegui. Então eu tentei diminuir 2.750 menos 150 e depois 200 pra dar o resultado. E depois, a partir desse resultado, eu somei mais os valores que deu, mas não tá certo! Mediadores: Porque que você acha que não está certo? Maria: Porque o resultado deu 950 de Thiago e José tem 200 a mais que Thiago. Só que 950+200 não dá 1.000, dá 1.050. Então não daria o valor do vídeo game. Eu encontrei Thiago R$ 950,00, Lucas R$ 800,00 e José R$ 1.100,00".*

Nota-se, então, que o problema foi equacionado da seguinte maneira: $2750 = 150 + x + 350 + x$ (27). Em seguida, encontrando o valor da variável x, a participante solucionou o problema, vivenciando uma situação adidática de validação, vista na figura 8 a seguir.

Figura 8 – Situação de validação vivenciada pela aluna participante Maria.



Fonte: dados da pesquisa, 2018.

Entretanto, pode-se notar que a participante Maria relatou, em entrevista, que a questão não estava solucionada de forma correta, quando a mesma analisou suas respostas apresentadas, correspondentes aos valores de Thiago, Lucas e José.

A participante estava correta em dizer que havia solucionado o problema de forma equivocada, uma vez que o valor associado a José não corresponde a R$200,00 reais a mais que o valor ligado a Thiago. Deste modo, a participante conseguiu solucionar o problema em partes, visto que, acertadamente, encontrou o valor correspondente a Thiago sendo R$150,00 reais a mais que o associado a Lucas, e que a somatória dos valores encontrados para os três (Thiago, Lucas e José) corresponde ao valor total da compra do vídeo game (R$2.750,00 reais).

Portanto, a participante Maria concluiu a resolução mobilizando a quarta estratégia das análises a priori, sistematizando o problema através de uma equação, diferenciando-se na interpretação e, portanto, na apresentação estética da mesma.

4.6 Considerações do segundo encontro

Assim como no primeiro encontro, notou-se que os alunos participantes se sentiam igualmente motivados, demostrando interesse em saber como seria constituído o segundo problema que teriam que solucionar. Deste modo, assim como no primeiro encontro, infere-se que a situação de devolução também aconteceu.

Os alunos participantes João e Maria vivenciaram as três fases de uma situação adidática e mobilizaram a quarta estratégia de resolução das análises a priori por meio de entrevistas e protocolos de resolução. João sistematizou o problema por meio da equação 26, solucionando corretamente a questão proposta. Maria realizou cálculos, elaborou esquemas e esboços, no entanto, diferentemente de João, apresentou um equívoco na interpretação e apresentação da solução do problema investigado.

Para finalizar o segundo encontro e também a experimentação, realizou-se a institucionalização com os participantes, em que se explicou o objetivo do segundo problema, os princípios históricos e culturais, as fases adidáticas vivenciadas por eles e as estratégias previstas nas análises a priori. Também se solicitou a socialização das resoluções que os participantes apresentaram para o problema estudado, chegando a um consenso do problema e do segundo encontro da sequência didática.

Por fim, agradeceu-se a participação dos alunos na pesquisa, pelo empenho demonstrado, pela experiencia adquirida e por a oportunidade de aprendizagem.

5. Considerações Finais

Ao estudar álgebra, os alunos precisam ser capazes de desenvolver um pensamento algébrico, fundamental para se utilizar em problemas matemáticos na leitura, compreensão, interpretação, análise e inferência de relações quantitativas de grandezas, utilizando letras e outros símbolos em suas representações.

Deste modo, é imprescindível que os alunos possam reconhecer regularidades e padrões de sequências numéricas, demonstrem resoluções matemáticas que explanem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes senários, do mesmo modo como produzir, interpretar e percorrer entre inúmeras representações simbólicas, objetivando solucionar problemas por meio de equações, compreendendo o caminho metodológico percorrido.

Nesta perspectiva, compreendeu-se as técnicas utilizadas pelos participantes nas resoluções das situações-problema vivenciadas, ocorrendo por meio das técnicas de substituição e soma de equações algébricas, antes previstas nas análises a priori, diferenciando-se apenas nas variáveis em estudo e na estética apresentada.

Observou-se dificuldades apresentadas no processo de mobilização de conhecimentos algébricos, especificamente, no que tange ao percurso metodológico de resolução dos problemas propostos, ou seja, em percorrer uma linha de raciocínio mais elaborado e mais claro no que diz respeito à compreensão.

Por outro lado, notou-se o quão é fascinante a mente dos participantes, quando se identificou as suas ideias de resolução que, mesmo não apresentando corretamente ou com formalidade matemática as suas apresentações, solucionaram os problemas propostos. Deste modo, ao vivenciarem as três fases de uma situação adidática, demonstraram autonomia, capacidade de manipulação matemática e algébrica bem fundamentadas para o grau de escolaridade que possuíam.

Assim, os maiores desafios enfrentados nas resoluções das atividades foram: realizar generalizações e variações entre grandezas, identificar a variável dos problemas apresentados, compreender a ideia de variável, usar simbologias algébricas e expressar, em sequências numéricas, regularidades.

Nessa perspectiva, é importante que o processo de ensino e aprendizagem da álgebra seja trabalhado desde o início do ensino fundamental, começando com ideias de propriedades de igualdades e generalizações de padrões em sequências numéricas, podendo ser realizado por meio de atividades lúdicas que façam os alunos se sentirem motivados a participar e a estudar esse conteúdo. Assim, em anos educacionais posteriores, poderão ter maior facilidade em trabalhar com conhecimentos algébricos mais complexos, facilitando a compreensão em um maior nível de linguagem, generalização e abstração.

Portanto, ensinar álgebra a partir de resoluções de problemas, por meio de metodologias de ensino instigantes, contextualizadas, interdisciplinares e relacionadas com situações do cotidiano vivenciadas pelos alunos, se tornou mais eficaz do que os levar a repetir exercícios de manipulação e memorização de técnicas de resolução, dificultando a construção de novos conhecimentos.

Referências

AGUIAR, Marcia. As lacunas do ensino de Álgebra no ensino fundamental: uma análise a partir da transposição didática. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo - SP. **Anais...** São Paulo - SP, 2016.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, p. 193-217, 1996.

BITTAR, Marilena. **Contribuições da Teoria das Situações Didáticas e da Engenharia Didática para Discutir o Ensino de Matemática**. In. TELES, Rosinalda Aurora de Melo; Borba, Rute Elisabete de Souza Rosa; MONTEIRO, Carlos Eduardo Ferreira (Orgs.) **Investigações em Didática da Matemática.** Vol. 2, Editora UFPE, Recife, 2017, p. 101-132.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf. Acesso em: 06 jun. 2018.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 35-113.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. 1. ed. 1. impr. São Paulo: Ática, 2008.

CERVO, Amado Luiz; BERVIAN, Pedro Alcino; SILVA, Roberto da. **Metodologia científica**. – 6. ed. – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

COSTA JÚNIOR, José Roberto; SILVA, João Batista Rodrigues da. Contribuições do pensamento relacional para a aprendizagem da Álgebra escolar. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo - SP. **Anais...** São Paulo - SP, 2016.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. revisada. 2. reimpr. São Paulo: EDUC, p. 77-111, 2016.

MACEDO, Aluska Dias Ramos; Santos Emily de Vasconcelos; Martins, Fabíola da Cruz. A resolução de problemas e os desafios no ensino da Álgebra. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo – SP. **Anais**... São Paulo – SP, 2016.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. revisada. 2. reimpr. São Paulo: EDUC, p. 233-247, 2016.

MARCONI, Maria de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. – 7. ed. – São Paulo: Atlas, 2010.

MARTINS, Fabíola da Cruz; SANTOS, Emily de Vasconcelos; MACEDO, Aluska Dias Ramos. A Resolução de problemas e os desafios no Ensino de Álgebra. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo – SP. **Anais...** São Paulo, 2016.

MARTINS, Lourival Pereira; DIAS, Marlene Alves. Diagnóstico de alguns aspectos que dificultam a passagem da aritmética para a álgebra na educação básica no Brasil. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba-PR. **Anais...** Curitiba-PR, 2013.

RAMOS, Carolina Soares; SILVA, Amanda Barbosa da.; OLIVEIRA, Regina Célia de. Os problemas e as concepções de álgebra em uma aula de matemática do sétimo ano. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba-PR. **Anais...** Curitiba-PR, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

SILVA, Nilson Alves da; FERREIRA, Marcus Vinícius Vieira; TOZETTI, Karla Dubberstein. Um estudo sobre a situação didática de Guy Brousseau. In: XII Congresso Nacional de Educação, 2015, Paraná. **Anais...** Paraná: PUCPR, 2015. p. 19951 – 19961.

TINOCO, Lucia A. de A.; PORTELA, Gilda Maria Q.; SILVA, M. Palmira da Costa; MENDES, Cassius T. Costa; AGUIR, Lennon. Álgebra é mais do que algebrismo. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba-PR. **Anais...** Curitiba-PR, 2013.

Sobre os autores

Emivan da Costa Maia
Mestre em Ensino de Ciências e Humanidades pela Universidade Federal do Amazonas. Especialista em Metodologia do Ensino de Matemática e em Metodologia do Ensino da Educação Superior, ambas pelo Centro Universitário Internacional UNINTER. Licenciado Pleno em Ciências – Matemática e Física pela Universidade Federal do Amazonas.
ORCID https://orcid.org/ 0000-0003-3072-9321 E-mail: maiaemivan22@gmail.com

Leonardo Dourado de Azevedo Neto
Professor do Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente da Universidade Federal do Amazonas atuando nos cursos de Licenciatura em Pedagogia e de Licenciatura Plena em Ciências – Matemática e Física. Possui mestrado em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, especialização em Matemática pela UFG – Campus Catalão, especialização em História e Cultura Afro-Brasileira e Indígena pelo

Centro Universitário Internacional UNINTER e Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal de Goiás – Campus Catalão.
ORCID https://orcid.org/ 0000-0003-3568-8901 E-mail: leonardo.dourado13@gmail.com

Recebido em: 06/03/2021
Aceito para publicação em: 01/04/2021